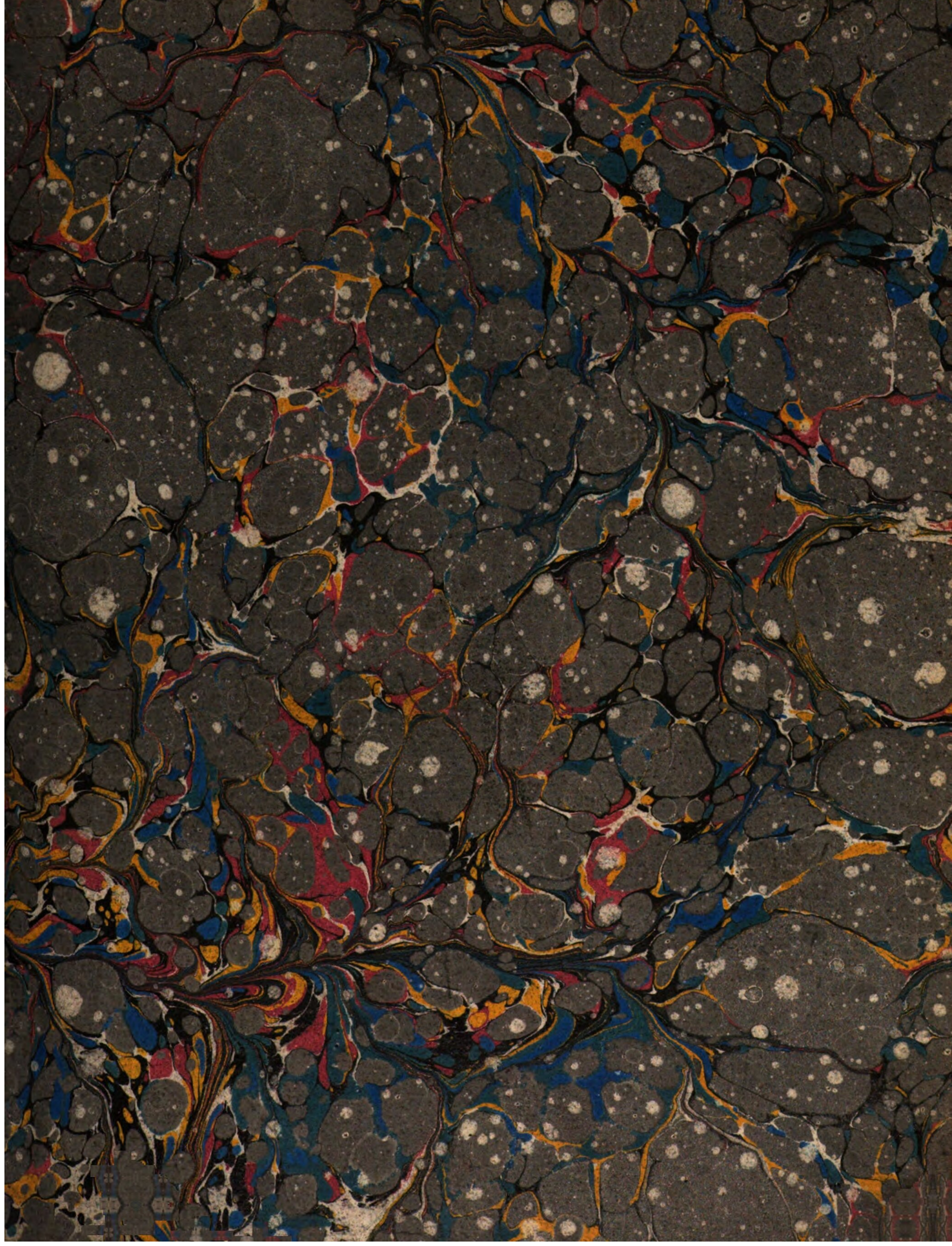


Math.u.⁴⁰
79







Ph. i. 66. c.

<36636489080014

<36636489080014

Bayer. Staatsbibliothek

4^o Math Un 79.

Mathesi. Systemata & methodi 150.

R

MATHEMATISCHE NEUIGKEITEN,
ODER DIE
ELEMENTAR- TRIANGULAR- UND FORMULAR-
ARITHMETIK UND GEOMETRIE.

DREY THEILE,

deren der erste die Arithmetik, der zweyte die Geometrie betrifft, und der dritte ein Verzeichniß von mehr als zwey hundert achtzig Formeln ur- und abgeleiteter geometrischer Grundsätze enthält, wovon die meisten in den ausführlichsten Abhandlungen über die Elementar-Geometrie fehlen.

D.

A. P. O. A. J. V. L. L. V. J. A. O. P. A.

A.

P. S. S. M. C. R. G. B. E. L. P. E. M. S. S. P.



W I E N.

GEDRUCKT BEY J. V. DEGEN,

1 8 0 4.

Inhalt.

Erster Theil.

Von der Arithmetik.

	Seite.
Von der Mathematik im Allgemeinen	1
Von der Berechnung im Allgemeinen	1
Von der Analogie der Berechnung	2
Von den Elementen der Berechnung	2
Von den ersten Operationen	3
Von den Progressionen	4
Von der Bildung des ersten additionellen Dreyeckes.	5
Von der Verfertigung der Elementar-Dreyecke	6
Erstes Elementar-Dreyeck	6
Von dem Gebrauche dieses Dreyeckes	8
Dreyecke der Potenzen	8
Zweytes Dreyeck der Elementaren	17
Gebrauch des zweyten Dreyeckes der Elementaren	18
Dreyecke der Coefficienten	18
Drittes Elementar-Dreyeck	22
Viertes Elementar-Dreyeck	22
Von den Formular-Dreyecken, und erstens von dem ersten Formular-Dreyecke, welches die Glieder des ersten additionellen Dreyeckes bestimmt.	23
Erstes Formular-Dreyeck	24
Bildung der übrigen additionellen Dreyecke	26
Vorläufige Bemerkungen über das allgemeine Formular-Dreyeck aller additio- nellen Dreyecke in's Unendliche	27
Bildung des allgemeinen Formular-Dreyeckes.	28
Erklärung der algebraischen Zeichen	29
Anwendung der Erläuterungen über die Verfertigung des allgemeinen Formu- lar-Dreyeckes, aller additionellen Dreyecke in's Unendliche, die mit zwey Ele- mentaren, deren erste die Einheit ist, versehen sind.	30
Anwendung des allgemeinen Formular-Dreyeckes auf alle additionelle Dreyecke in's Unendliche, die zwey Elementaren, deren erste die Einheit ist, haben.	40
Von den besonderen Formular-Dreyecken, welche die correspondirenden additio- nellen Dreyecke bestimmen.	49

	Seite.
Von dem Elementar-Dreyecke der Ergänzungen	50
Dreyeck der Elementaren der Ergänzungen	50
Ergänzungs-Dreyeck, um den Coefficienten der besonderen Formular-Dreyecke zu Stande zu bringen	51
Differential-Dreyeck	53
Allgemeine Formel für alle besondere Formular-Dreyecke in's Unendliche .	54
Bildung der besonderen Formular-Dreyecke	59

Zweyter Theil.

Von der Geometrie.

Einleitung	61
Von den Dreyecken. Vom rechtwinkligen Dreyecke, dessen Seiten proportionirt sind	63
Oberfläche der Dreyecke im Allgemeinen	64
Vor der Addition und Subtraction der Resultate, so mit einer unendlichen Rei- he in ihren Decimalbrüchen endigen	66
Von der Multiplication und Division der Resultate, die in ihren Decimalbrü- chen mit unendlichen Reihen endigen	68
Von den Verwerfungen, so die Berechnung in den Decimalbrüchen zu erlauben scheint	78
Von der Hypothenuse	83
Von dem Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels	85
Von dem Durchmesser des dem Dreyecke eingeschriebenen Zirkels	88
Von dem Sinus versus	95
Von der Extrasecante und von der Hypothenuse der Sinusse	98
Von der Hypothenuse des rechtwinkligen gleichschenkeligen Dreyeckes, oder von der Diagonale des Quadrates und ihrem Verhältnisse zur Seite des Quadrates	101
Von den so genannten unvollkommenen Quadraten, und ihren so genannten ir- rationellen Wurzeln	103
Von den Sinussen	114
Von dem Umkreise des Zirkels, und seinem bekannten Verhältnisse zum Durch- messer, sammt der Formel, die dieses Verhältniß bestimmt.	115
Von den Sinus-Tafeln	122
Von der Quadratur oder der Rectificirung des Umkreises in ein neues Verhält- niß, sammt der Formel, die dieses neue Verhältniß bestimmt	131
Beweis dieses neuen Verhältnisses	132

Dritter Theil.

Verzeichniß der Formeln	145
-----------------------------------	-----

Mathematische Neuigkeiten

oder die

Elementar-, Triangular - und -Formular-

Arithmetik und Geometrie.

Erster Theil.

Von der Arithmetik.

Von der Mathematik im Allgemeinen.

Die Mathematik ist eine unerschöpfliche Grube, in der man nur beobachten und arbeiten soll, um etwas zu finden; und so wie die Metalle vor ihrer Ausgrabung existirten, eben so existirten die Resultate vor den Nachforschungen, die nur Mittel und Werkzeuge ihrer Entdeckung sind: alles war durch die Berechnung desjenigen zusammen gesetzt, der alles geordnet hat, *pondere numero et mensura*.

Die Schlüssel der mathematischen Wissenschaften sind die Arithmetik und die Geometrie; sie sind, sagt Plato, die beyden Flügel des Mathematikers.

Von der Berechnung im Allgemeinen.

Die Berechnung im Allgemeinen, in ihren Endursachen betrachtet, ist die Art, mittelst numerischen Zusammensetzungen die verlangten Resultate zu finden.

Diese Resultate können in's Unendliche verschieden seyn, und daher eine unendliche Menge verschiedener Resultate geben.

Es folget aber daraus nicht, daß eine verschiedene Zusammensetzung ein verschiedenes Resultat geben müsse.

Es gibt mehrere numerische Zusammensetzungen, die, obschon sie noch so verschieden sind, dennoch ein nähmliches Resultat hervor bringen.

Ja sogar es hindert nichts, daß diese Verschiedenheiten in das Unendliche mannigfaltig abwechseln, und daß dennoch die Resultate die nähmlichen bleiben.

Es ist hier nicht die Rede von diesen dem Scheine nach verschiedenen Zusammensetzungen, welche nur mathematische Ergötzungen sind, und die der Mathematiker bald zu unterscheiden weiß, sondern von denjenigen, so die Berechnung scheint bestimmt zu haben, um diese Resultate hervor zu bringen; man wird in der Folge sehen, ob diese Behauptungen zu gewagt sind.

Von der Analogie der Berechnung.

Unter der Analogie der Berechnung verstehe ich den beständigen und regelmässigen Gang, so die Berechnung in einer gegebenen Operation, und in allen anderen ihr ähnlichen beobachtet.

Von diesem Gange abweichen, ist, sich von dem wahren Resultate entfernen, und man wird in der Folge zeigen, daß die Abweichung von diesem Gange (aus was immer für einer Ursache) fehlerhafte Resultate hervor bringen mußte, und hervor gebracht hat.

Von den Elementen der Berechnung.

Die Elemente der Berechnung sind die *Einheit* und die *Null*; sie bilden die Zahlen, und folglich alle numerischen Zusammensetzungen, wenn man fragte, wie die Elemente die Zahlen gebildet haben? so würde die Analogie der Berechnung antworten, daß es durch die Addition des ersten zum zweyten Elemente, und durch die Addition der auf einander folgenden Resultate zum ersten Elemente geschehen its.

Den Einfluß der Elemente auf alle Theile einer Wissenschaft miszkennen, ist sich Schranken setzen, welche hindern in das Innerste derselben einzudringen.

Es gibt keine Wissenschaft, in welcher der Einfluß der Elemente schwerer zu kennen ist, als in der Mathematik.

Diese Schwierigkeit hat viele Resultate verfehlen machen, und hat gemacht, daß man als erste Grundsätze solche angenommen hat, die nur abgeleitete Grundsätze waren. Das erste Element der Berechnung, die Einheit, und sein Einfluß in die Operationen ist desto schwerer zu kennen, weil dort, wo er als vorzügliches Werkzeug eintritt, man nicht wahrnimmt, ob er dort als Multiplicator, Divisor, Coefficient, Exponent oder Potenz u. s. w. eintritt; und man gibt der Analogie ungerechter Weise die Schuld des fehlerhaften Resultates.

In der Folge dieses Werkes wird man durch Beyspiele beweisen, wie groß dieser Einfluß und die, weil man ihn mißkannte, daraus entstandenen Folgen waren; und man wird einige besondere Eigenschaften der Elemente, die, wie ich glaube, bis jetzt unbekannt sind, darzeigen.

Von den ersten Operationen.

Unter den vier ersten Operationen der Arithmetik zeichnen sich vorzüglich die Multiplication und die Division aus.

Man sagt gewöhnlich, daß die Multiplication nur eine Addition eines der beyden Factoren sey, so oftmahl wiederholt, als es Einheiten im anderen Factor gibt.

Es wäre unnöthig, über die vier ersten Operationen vieles zu sagen, da der Zweck dieses Werkes nicht ist in ihre Zergliederung einzutreten.

Man wird nur bemerken, daß die Berechnung für die Zahlen, die mit einer unendlichen Reihe endigen, einen anderen Gang genommen hat, als denjenigen, der für die Zahlen ohne Reihe gebräuchlich ist, wie man es in der Folge beweisen wird: hier wird man sich begnügen ein Beyspiel des Gesagten zu geben, in den vier folgenden Zahlen, die in geometrischer Proportion stehen, mit der Anmerkung, daß man durch den Buchstaben *s* eine unendliche Reihe der Ziffer, worauf er gestellt ist, versteht.

$$9, 16^s : 4, 583^s : : 2, 56^s : 1, 283^s.$$

In diesem Beyspiele findet man mehrere Multiplicationen und Divisionen, um sich des vorher Gesagten zu überzeugen.

So wie auch in der folgenden Proportion:

$$100 : 0,9 : : 111,1^s : 1$$

welcher drittes Glied kein idealischer, aber der wahre, durch die Berechnung hervor gebrachte, Werth des Quadrates der Hypothenuse des Dreyeckes cDr ist; wie es aus der geometrischen Figur, die dem zweyten Theile beygefüget ist, einleuchten wird.

Von den Progressionen.

Reihe und *Progression* sind Sinonym; die Mathematiker unterscheiden vorzüglich die arithmetische und geometrische Progression.

Die übrigen Progressionen scheinen mir zu sehr vernachlässigt zu seyn, ich werde trachten sie wieder empor zu bringen.

Um es mit Nutzen zu thun, muß man in einem Ueberblicke die Progressionen vereinigt sehen, die eine Verwandtniß in ihrer Gliederreihe haben: man muß sie sehen, ohne die Verhältnisse, so sie unter sich haben, zu unterbrechen, das heißt, in der Reihe der natürlichen Zahlen.

Diese Vereinigungen werden nach Belieben vierseitige oder dreyeckige Formen bilden: ich werde ihnen nach dem Beyspiele des berühmten *Pascal* die dreyeckige Form geben, und ich werde sie additionelle arithmetische Dreyecke, oder bloß *additionelle Dreyecke* nennen, weil sie durch die bloße Addition gebildet werden.

Pascal, der nur ein einziges dieser additionellen Dreyecke gemacht hat, hat es von unten angefangen: ich werde es von oben anfangen, welches den einzigen Unterschied machen wird, daß die im Dreyecke des *Pascals* senkrecht stehenden Zahlen bey mir horizontal stehen werden.

Ich werde ihnen allen eine *Basis* und *Elementaren* geben: unter *Basis* verstehe ich die Summe der Elementaren, und die gehörige Vertheilung der Basis gibt die Elementaren.

Die Nothwendigkeit dieser Maßregel wird hernach bewiesen werden, und wenn sie besonders im ersten dieser Dreyecke überflüssig scheint, so ist es nur wegen der Einfachheit der Elemente, die seine Basis und die Elementaren bilden.

Es wird in der Bildung der Elementar-Dreyecke selbst, die ich in der Folge geben werde, einleuchten, daß ohne die Basis, und ihre gehörige Vertheilung in Elementaren, die Bildung der Dreyecke unmöglich ist.

Von der Bildung des ersten additionellen Dreyecks.

I

O. I.

O. I. I.

0. 1. 2. 1.

0. 1. 3. 3. 1.

0. 1. 4. 6. 4. 1.

0. 1. 5. 10. 10. 5. 1.

0. 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.

0. 1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1.

0. 1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1.

0. 1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9.

0. 1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1.

0. 1. 11. 55. 165. 330. 462. 462. 330. 165. 55. 11. 1.

0. 1. 12. 66. 220. 495. 792. 924. 792. 495. 220. 66. 12. 1.

0. 1. 13. 78. 286. 715. 1287. 1716. 1716. 1287.

Man sieht aus der Bildung, daß es die Elemente sind, welche dieses erste additionelle Dreyeck bilden, und zwar durch folgende Formel: $\text{Glie}d = \check{p} + d$, das heißt: *jedes Glied ist gleich dem vorhergehenden Verticalgliede mehr dem Diagonalgliede.*

Es ist unnöthig anzumerken, daß man hier vom Diagonalgliede links redet, weil die Analogie der Berechnung ihn schon links fest gesetzt hat.

Alle Mathematiker wissen, daß der berühmte *Pascal* in seinen Horizontalreihen die Coefficienten gefunden hat, welche die verschiedenen Theile einer beliebigen Potenz, zu welcher man ein Binomium erhoben hat, multipliciren.

Sie wissen ebenfalls, daß dieses Dreyeck dazu dient, um die Anzahl aller Gattungen von Combinationen zu finden.

Es wird daher so nützlich seyn, sich von der Richtigkeit jedes Gliedes zu versichern, als sich zu versichern, daß man keine Additions-Fehler, die sich bis am Ende fortsetzen würden, begangen hat.

Und deßwegen soll man Formeln finden, die jedes Glied, ohne Rücksicht auf die vorhergehenden, bestimmen, und die der Formel, die ich eben gegeben habe, so zu sagen, zur *Controle* dienen.

Diese Bestimmung wird die Bildung der Elementar-Dreyecke

veranlassen, deren zweytes die Elementaren der Coefficienten angegeben wird, welche die verschiedenen Glieder dieser Formeln multipliciren; Dreyecke, die wegen ihrer Sonderbarkeit den Mathematikern vorgelegt zu werden verdienen.

Ich werde daher das erste additionelle Dreyeck für einen Augenblick verlassen, um mich mit der Bildung der Elementar-Dreyecke zu beschäftigen.

Von der Verfertigung der Elementar-Dreyecke.

Diese Elementar-Dreiecke sind das Resultat mehrerer Additionen und Multiplicationen, und sind mittelst der Wurzeln und einer ziemlich zusammen gesetzten Formel gebildet worden.

Obschon ich nur den Gebrauch zweyer dieser Dreyecke kenne, werde ich dennoch vier derselben geben; um desto besser die Analogie der Berechnung zu beobachten; auch ist es sehr wahrscheinlich, daß das dritte Dreyeck und alle übrige ähnliche ihren Zweck und ihren Gebrauch haben, obschon man sie nicht kennet, und es ist die Analogie der Berechnung, die mich in dieser Meinung bestätigt.

Hier also die Bildung des ersten dieser Dreyecke.

Erstes Elementar-Dreyeck.

$$\text{Glieder} = p^v (\bar{n} - 1) + dr^g + dr^3 (\bar{n} - 2)$$

[illegible]

Man sieht darin und es ist zu bemerken:

1) Dafs es die Elemente $\overset{\circ}{i}$, vertical gestellt, sind, welche dieses erste Dreyeck bilden, wie sie alle andere in's Unendliche bilden werden, und dieses mit Hülfe der Formel und der Zahlen (die ich Wurzeln genannt habe) gestellt auf die Querlinie des Dreyeckes, und deren jede die Wurzel der unter ihr senkrecht stehenden Reihe ist.

2) Dafs die beyden ersten dieser Wurzeln immer die Elemente 0 1 seyn werden; dafs die dritte Wurzel gleich seyn muß der *Wievielheit* (*Quotität*) des Dreyeckes.

3) Dafs die Differenz zwischen der zweyten und dritten Wurzel gleich seyn muß der Differenz zwischen den übrigen Wurzeln.

4) Dafs die Formel sich dergestalt ausdrückt:
Jedes Glied ist gleich dem vorhergehenden Verticalgliede, multiplicirt mit der Anzahl der Horizontalglieder weniger eins, vom gesuchten an gerechnet: mehr dem Diagonalgliede, multiplicirt mit der Wurzel des gesuchten Gliedes: mehr dem Diagonalgliede, multiplicirt mit der dritten Wurzel; das Product multiplicirt mit der Anzahl der Verticalglieder, weniger zwey.

Folglich sieht man daraus die Bedeutung der Zeichen der Formel.

$\overset{v}{p}$ Vorhergehendes Verticalglied.

$(\overset{v}{n}-1)$ Anzahl der Horizontalglieder, weniger eins.

d Diagonalglied.

$\overset{g}{r}$ Wurzel des Gliedes.

$\overset{3}{r}$ Dritte Wurzel.

$(\overset{v}{n}-2)$ Anzahl der Verticalglieder, weniger 2, und das überall mit Bezug auf das gesuchte Glied.

5) Man sieht, dafs die Summen der Horizontalreihen die berühmten Zahlen 1. 2. 6. 24. 120. 720 u. s. w. hervor bringen, die aus der auf einander folgenden Multiplication der natürlichen Zahlen mit vorstehendem Elemente entstehen; das heifst, der Zahlen 1. 1. 2. 3. 4. 5. 6. u. s. w.

Man könnte auch dieses Dreyeck durch eine einfachere Formel verfertigen, nähmlich durch folgende: $\text{Glieder} = \overset{v}{p}(\overset{v}{n}-1) + d(\overset{r}{n}-1)$.

Allein sie gilt nur für das erste Elementar Dreyeck, da die übrigen nicht aus dieser Formel entspringen.

Diels ist ein erster Beweis des grossen Einflusses des Elementes in die Operationen; es wirkt hier als veränderliche, jedes Diagonalglied multi-

plicirende Wurzel, und als beständige, das Product des Diagonalgliedes mit der Anzahl der Verticalglieder weniger 2 multiplicirende, Wurzel.

Von dem Gebrauche dieses Dreyeckes.

Der ganze Gebrauch, den ich von diesem Dreyecke kenne, besteht darin, daß seine Horizontalreihen die Elementaren der Potenzen der natürlichen Zahlen sind, indem man von der rechten zur linken Seite den Anfang macht. Ein solcher Anfang ist eine allgemeine Regel, ob-
schon es bey diesem ersten Dreyecke gleichgültig ist, weil die Ele-
mente darin herrschen.

Die erste Horizontalreihe gibt die Elementaren des Elementes, die zweyte diejenigen der ersten Potenzen, die dritte der zweyten, u. s. w.

Ich habe diese Elementaren vertical gestellt, weil in dieser Stellung die *Dreyecke der Potenzen*, die daraus entspringen, eine Sonderbarkeit mehr darbiethen werden.

Dreyecke der Potenzen.

Potenzen des Elementes.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|---|---|---|--|
| 0 | : | | | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | | | |
| 0 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | | |
| 0 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | |

Potenzen der natürlichen Zahlen.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|---|---|---|--|
| 0 | : | | | | | | | | |
| 1 | 0 | : | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | | | |
| 0 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | | |
| 0 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | |

Zweyte Potenzen.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|---|---|---|--|--|--|--|--|
| 0 | : | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 5 | 4 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 7 | 9 | 5 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 9 | 16 | 14 | 6 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 11 | 25 | 30 | 20 | 7 | 1 | 0 | : | | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 13 | 36 | 55 | 50 | 27 | 8 | 1 | 0 | : | | | | | | | | |
| 0 | 2 | 15 | 49 | 91 | 105 | 77 | 35 | 9 | 1 | 0 | : | | | | | | | |
| 0 | 2 | 17 | 64 | 140 | 196 | 182 | 112 | 44 | 10 | 1 | 0 | : | | | | | | |
| 0 | 2 | 19 | 81 | 204 | 336 | 378 | 294 | 156 | 54 | 11 | 1 | 0 | : | | | | | |

Dritte Potenzen.

| | |
|---|---|
| 0. | . |
| 1. 0. | . |
| 4. 1. 0. | . |
| 1. 5. 1. 0. | . |
| 0. 6. 6. 1. 0. | . |
| 0. 6. 12. 7. 1. 0. | . |
| 0. 6. 18. 19. 8. 1. 0. | . |
| 0. 6. 24. 37. 27. 9. 1. 0. | . |
| 0. 6. 30. 61. 64. 36. 10. 1. 0. | . |
| 0. 6. 36. 91. 125. 100. 46. 11. 1. 0. | . |
| 0. 6. 42. 127. 216. 225. 146. 57. 12. 1. 0. | . |

Vierte Potenzen.

| | |
|--|---|
| 0. | . |
| 1. 0. | . |
| 11. 1. 0. | . |
| 11. 12. 1. 0. | . |
| 1. 23. 13. 1. 0. | . |
| 0. 24. 36. 14. 1. 0. | . |
| 0. 24. 60. 50. 15. 1. 0. | . |
| 0. 24. 84. 110. 65. 16. 1. 0. | . |
| 0. 24. 108. 194. 175. 81. 17. 1. 0. | . |
| 0. 24. 132. 302. 369. 256. 98. 18. 1. 0. | . |
| 0. 24. 156. 434. 671. 625. 354. 116. 19. 1. 0. | . |
| 0. 24. 180. 590. 1105. 1296. 979. 470. 135. 20. 1. 0. | . |
| 0. 24. 204. 770. 1695. 2401. 2275. 1449. 605. 155. 21. 1. 0. | . |

Man sieht, daß diese Dreyecke sich auf die nämliche Art, wie das additionelle Dreyeck, bilden.

Man sieht, mit welcher Sorgfalt die Berechnung darin die Analogie ihres Mechanismus beobachtet; indem sie

1) Jedem Dreyecke ihre Elementaren gibt, deren Summe endlich zur Basis der Bildung wird.

2) Da es der Analogie zuwider wäre, mit 3 anzufangen, wenn sie mit 2 anfangen kann, und mit 2 anzufangen, wenn sie es mit 1 kann; so ist es einleuchtend, daß die Weglassung des ersten dieser Dreyecke ein Fehler wider die Analogie wäre. Die vierte Reihe des dritten Dreyeckes hatte die zweyten Potenzen angegeben: die dritte Reihe des zweyten hatte die ersten Potenzen angegeben; es mußte folglich auch die zweyte Reihe des ersten Dreyeckes eine Reihe von Potenzen angeben; und diese Potenzen könnten nur diejenigen des Elementes seyn.

Man sieht, daß das erste Elementar-Dreyeck durch seine beyden ersten Horizontalreihen, das erste *additionelle Dreyeck*, welches ich oben gegeben habe, wieder hervor bringt, und es ist nur um die Analogie zu zeigen, daß ich eine Skizze davon wiederhohlet habe.

Man sieht, daß, nachdem man bis auf die Reihen der Potenzen gekommen ist, es nicht mehr nöthig ist, das Dreyeck zu ergänzen.

Ich habe sie dennoch ergänzt, um folgende Sonderbarkeiten des Mechanismus der Berechnung beobachten zu machen.

1. Daß nicht allein die zwey ersten dieser Dreyecke, sondern auch alle übrige einzelne Glieder besitzen, die kein scheinbares Verhältniß unter sich haben, und daß sie dennoch betrachtet werden können, als ob jede ihrer Horizontalreihen nur eine Zahl ausmache, wenn man nur jedes Glied als eine einzelne Ziffer ansieht.

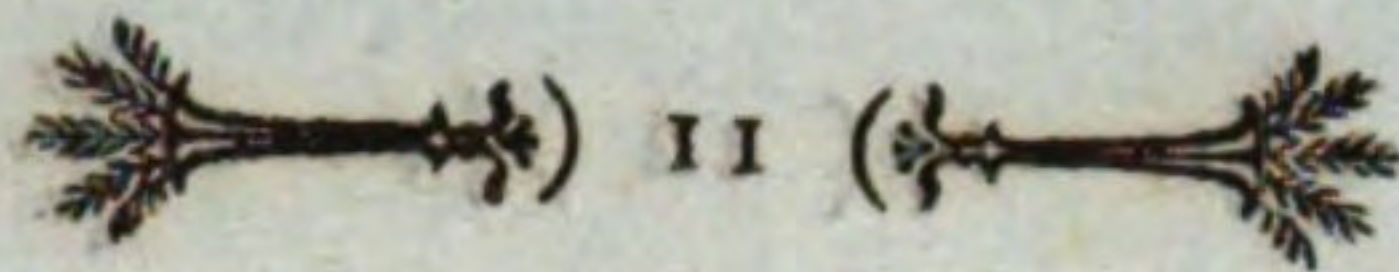
2. Daß jede dieser Horizontalreihen als eine einzige Zahl angesehen, und jedes Glied, als eine einzelne Ziffer, gleich ist der Summe aller vorhergehenden Reihen, ausgenommen die Elementaren, so sich in den ersten Reihen befinden könnten.

3. Daß, wenn die Reihen der Elementaren des ersten Dreyeckes $\begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \end{smallmatrix}$ und folglich ihre Summe $= 11$ ist, es diese Zahl 11 sey, die auf eine sonderbare Weise herrscht in allen diesen Dreyecken bis in das Unendliche.

4. Weil, wenn man jede Horizontalreihe, die nicht von den Elementaren unmittelbar afficirt ist, mit 11 multiplicirt, das Product gleich ist der unmittelbar darauf folgenden Reihe; indem man die Reihen wechselseitig für eine einzelne Zahl, und jedes Glied für eine einzelne Ziffer nimmt.

Allein wird man sagen, man sieht wohl, daß dieses für drey oder vier Reihen wahr ist, aber die bloße Uebersicht ist hinlänglich, um zu zeigen, daß dieses nicht für alle wahr seyn könne.

Dieß war das Urtheil, das ich beym ersten Ueberblicke darüber fällte; allein ich irrte mich: ich hatte die Analogie der Berechnung



nicht begriffen, welche der Augenschein besser, als alle Vernunftschlüsse, darstellen wird.

| | I | I | I | I | I | I | I |
|-------------|----------------|-----|---------------|-----|------|------|------|
| | 01 | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 |
| $11^1 =$ | 11 | 11 | .1 | .3 | .6 | .10 | .15 |
| | 011 | | 121 | .1 | .4 | .10 | .20 |
| $11^2 =$ | 121 | | 1331 | .1 | .5 | .15 | .25 |
| | 0121 | | 14641 | .1 | .6 | .21 | .30 |
| $11^3 =$ | 1331 | | 161051 | .1 | .7 | .28 | .42 |
| | 01331 | | 1771561 | .1 | .8 | .36 | .56 |
| $11^4 =$ | 14641 | .1 | 19487171 | .7 | .9 | .45 | .72 |
| | 014641 | .21 | 214358881 | .35 | .8 | .64 | .96 |
| $11^5 =$ | 161051 | .21 | 2357947691 | .35 | .9 | .81 | .126 |
| | 0161051 | .35 | 25937424601 | .70 | .126 | .100 | .156 |
| $11^6 =$ | 1771561 | .21 | 285311670611 | .56 | .126 | .135 | .210 |
| | 01771561 | .7 | 3138428376721 | .28 | .84 | .165 | .280 |
| $11^7 =$ | 19487171 | .1 | 338428376721 | .8 | .36 | .210 | .420 |
| | 019487171 | .35 | 3638428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| $11^8 =$ | 214358881 | .35 | 398428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | 0214358881 | .70 | 4338428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| $11^9 =$ | 2357947691 | .70 | 468428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | 02357947691 | .1 | 5038428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| $11^{10} =$ | 25937424601 | .1 | 538428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | 025937424601 | .1 | 5738428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| $11^{11} =$ | 285311670611 | .1 | 608428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | 0285311670611 | .1 | 6438428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| $11^{12} =$ | 3138428376721 | .1 | 678428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | 03138428376721 | .1 | 7138428376721 | .1 | .9 | .252 | .504 |
| | .12 | .45 | .120 | .45 | .120 | .45 | .120 |
| | .66 | .10 | .1 | .10 | .1 | .10 | .1 |
| | .220 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .495 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .792 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .924 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .792 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .495 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .220 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .66 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .12 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |
| | 3138428376721 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 | .1 |

Man sieht folglich, daß jedes Resultat eine Potenz von 11 darbie-
thet, die gleich ist jeder correspondirenden Horizontalreihe, auf die
obbenannte Weise genommen.

Jetzt muß man sehen, ob jede Reihe, auf diese Weise genommen,
der Summe aller übrigen vorhergehenden gleich seyn wird.

Ich werde die 9te Reihe wählen, die gleich ist
1771561, und ich werde hier alle vorhergehende
Reihen setzen, hernach werde ich die 15te Reihe
wählen, die gleich ist 3138428376721, und der die
14 vorhergehenden Reihen, geordnet wie oben, gleich
seyn sollen.

1
01
011
0121
01331
014641
015

Es ist nöthig zu bemerken, daß diese 14 Reihen
aus dem obigen additionellen Dreyecke genommen
sind, das das nämliche ist, als die 2 ersten Drey-
ecke der Potenzen; da diese nur nicht genug ergänzt
sind.

10
10
5
1
1771561

Man sieht daher, daß die versprochene Gleich-
heit sich findet.

Daraus folgt, daß die Coefficienten (auf die ob-
benannte Weise genommen) welche die verschiede-
nen Theile, was immer für einer Potenz, zu der
man ein Binomium erhebt, afficiren, immer einer
gleichen Potenz von 11 gleich sind.

1
01
011
0121
01331
014641
0161051
01771561
019487171
0214358881
02357947691
025937424601
0285311670611
3138428376721

Man muß jetzt zeigen, daß die 4 Eigenschaften,
so die Berechnung auf die zwey ersten Dreyecke
der Potenzen angewendet hat, sich ebenfalls auf al-
le übrige in das Unendliche anwenden lassen.

Ich werde diese Anwendung auf das dritte Dreyeck machen.

| | | | | | | | | | |
|--------------------|-------------|-----------|-----|------|-------|--------|---------|----------|------|
| | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 11 | . 1 | . 1 | . 3 | . 5 | . 7 | . 9 | 11 | 13 |
| $21 \times 11^0 =$ | 21 | 11 | 21 | . 1 | . 4 | . 9 | . 16 | . 25 | . 36 |
| | 021 | | | 231 | . 1 | . 5 | . 14 | . 30 | . 55 |
| $21 \times 11^1 =$ | 231 | | | 2541 | . 1 | . 6 | . 20 | . 50 | |
| | 0231 | | | | 27951 | . 1 | . 7 | . 27 | |
| $21 \times 11^2 =$ | 2541 | | | | | 307461 | . 1 | . 8 | |
| | 02541 | | | | | | 3382071 | . 1 | |
| $21 \times 11^3 =$ | 27951 | | | | | | | 37202781 | |
| | 027951 | 2 | | | | | | | |
| $21 \times 11^4 =$ | 307461 | 15 | | | | | | | |
| | 0307461 | . 49 | | | | | | | |
| $21 \times 11^5 =$ | 3382071 | . 91 | | | | | | | |
| | 03382071 | . 105 | | | | | | | |
| $21 \times 11^6 =$ | 37202781 | . 77 | | | | | | | |
| | 037202781 | . 35 | | | | | | | |
| $21 \times 11^7 =$ | 409230591 | . 9 | | | | | | | |
| | 0409230591 | . 1 | | | | | | | |
| $21 \times 11^8 =$ | 4501536501 | 409230591 | | | | | | | |
| | 04501536501 | | | | | | | | |
| $21 \times 11^9 =$ | 49516901511 | | | | | | | | |

1
11
021
0231
02541
027951
0307461
03382071
037202781
0409230591
04501536501
49516901511

Man sieht folglich, daß diese 4 Eigenschaften sich ebenfalls bestätigen, und man kann daraus auf die Analogie der Berechnung für alle übrige in das Unendliche schließen.

Dennoch werde ich noch einen Versuch mit den letzten dieser Dreyecke, mit denjenigen, die zur Basis 6 und 24 haben, machen.

| | | | | | |
|---------------------|------------|-----------|------------|--------|---------|
| | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 41 | 12 | 18 | 24 | 30 |
| | 51 | . 7 | . 19 | . 37 | . 61 |
| | 151 | . 1 | . 8 | . 27 | . 64 |
| $661 \times 11^0 =$ | 661 | 7271 | 79981 | 879791 | 9677701 |
| | 0661 | | | | |
| $661 \times 11^1 =$ | 7271 | | | | |
| | 07271 | | | | |
| $661 \times 11^2 =$ | 79981 | 6 | 6 | | |
| | 079981 | 36 | 42 | | |
| $661 \times 11^3 =$ | 879791 | . 91 | 127 | | |
| | 0879791 | . 125 | . 216 | | |
| $661 \times 11^4 =$ | 9677701 | . 100 | . 225 | | |
| | 09677701 | . 46 | . 146 | | |
| $661 \times 11^5 =$ | 106454711 | . 11 | . 57 | | |
| | 0106454711 | . 1 | . 12 | | |
| $661 \times 11^6 =$ | 1171001821 | 106454711 | 1171001821 | | |
| | | | | | |
| | 1 | | | | |
| | 41 | | | | |
| | 151 | | | | |
| | 0661 | | | | |
| | 07271 | | | | |
| | 079981 | | | | |
| | 0879791 | | | | |
| | 09677701 | | | | |
| | 106454711 | | | | |
| | 1171001821 | | | | |

Zu diesem Dreyecke gibt es keine andere weitere Bemerkung, als dafs die Summe der 2 ersten Horizontalreihen nur den zwey ersten Ziffern der dritten gleich sind, weil die erste Ziffer eine der Elementaren ist, die niemahls in die Reihe der Summirung eintreten, wie vorher gesagt wurde.

Endlich gebe ich hier das Dreyeck mit der Basis 24.

| | | | | | |
|-----------------------|--|--|--|--|---|
| | $\begin{array}{r} 1 \\ 111 \\ \hline 121 \\ 11 \\ 12 \\ \hline 1 \\ 2431 \\ 01 \\ 23 \\ 13 \\ \hline 1 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 36 \\ 14 \\ 1 \\ \hline 27741 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 60 \\ 50 \\ 15 \\ \hline 305151 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 84 \\ 110 \\ 65 \\ 16 \\ \hline 3356661 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 108 \\ 194 \\ 175 \\ 81 \\ 17 \\ \hline 36923271 \end{array}$ |
| $27741 \times 11^0 =$ | $\begin{array}{r} 27741 \\ 027741 \\ \hline 305151 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 132 \\ 302 \\ 369 \\ 256 \\ 98 \\ 18 \\ \hline 406155981 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 156 \\ 434 \\ 671 \\ 625 \\ 354 \\ 116 \\ 19 \\ \hline 4467715791 \end{array}$ | | |
| $27741 \times 11^1 =$ | $\begin{array}{r} 305151 \\ 0305151 \\ \hline 3356661 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^2 =$ | $\begin{array}{r} 3356661 \\ 03356661 \\ \hline 36923271 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^3 =$ | $\begin{array}{r} 36923271 \\ 036923271 \\ \hline 406155981 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^4 =$ | $\begin{array}{r} 406155981 \\ 0406155981 \\ \hline 4467715791 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^5 =$ | $\begin{array}{r} 4467715791 \\ 04467715791 \\ \hline 49144873701 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^6 =$ | $\begin{array}{r} 49144873701 \\ 049144873701 \\ \hline 540593610711 \end{array}$ | | | | |
| $27741 \times 11^7 =$ | | | | | |
| | $\begin{array}{r} 1 \\ 111 \\ 1221 \\ 3431 \\ 27741 \\ 305151 \\ 3356661 \\ 36923271 \\ 406155981 \\ 4467715791 \\ 49144873701 \\ \hline 540593610711 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 180 \\ 590 \\ 1105 \\ 1296 \\ 979 \\ 470 \\ 135 \\ 20 \\ \hline 49144873701 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 24 \\ 204 \\ 770 \\ 1695 \\ 2401 \\ 2275 \\ 1449 \\ 605 \\ 155 \\ 21 \\ \hline 540593610711 \end{array}$ | | |

Weil dieser Versuch abermahls gelungen ist, so glaube ich, daß die Analogie der Berechnung für alle übrige Dreyecke, die man bilden wird, hinlänglich fest gesetzt ist.

Es ist auch nützlich zu bemerken, daß die Zahl 11 (die man als das Resultat der Elemente gesehen hat, nämlich zusammen gesetzt von $\begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \end{smallmatrix}$) darauf ihren Einfluß nicht beschränkt, denn, wenn man sie von der horizontalen Stellung, wie 11, in eine senkrechte Stellung wie $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ übersetzt, und daß man sie, auf diese Weise zusammen gesetzt, als 2 betrachtet; und man alsdann die Summe jeder Horizontalreihe, die nicht unmittelbar von den Elementaren afficirt wird, senkrecht gestellt, mit 2 multiplicirt, so wird das Product immer gleich seyn der Summe der nachfolgenden und ebenfalls senkrecht versetzten Horizontalreihe, wie folget:

| | | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|------|------------|----------|-------------|------|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 6 | 6 | 24 | 24 |
| 5 | 6 | 17 | 19 | 36 | 42 | 180 | 204 |
| 10 | 15 | 64 | 81 | 91 | 127 | 590 | 770 |
| 10 | 20 | 140 | 204 | 125 | 216 | 1105 | 1695 |
| 5 | 15 | 196 | 336 | 100 | 225 | 1296 | 2401 |
| 1 | 6 | 182 | 378 | 46 | 146 | 979 | 2275 |
| <u>32</u> | <u>1</u> | 112 | 294 | 11 | 57 | 470 | 1449 |
| 2 | 64 | 44 | 156 | 1 | 12 | 135 | 605 |
| <u>64</u> | | 10 | 54 | <u>416</u> | <u>1</u> | 20 | 155 |
| | | 1 | 11 | 2 | 832 | 1 | 21 |
| | | <u>768</u> | 1 | <u>832</u> | | <u>4800</u> | 1 |
| | | 2 | 1536 | | | 2 | 9600 |
| | | <u>1536</u> | | | | <u>9600</u> | |

Zweytes Dreyeck der Elementaren.

$$\text{Glieder} = p(\bar{n}-1) + dr + dr(n-2)$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|----|----|-------|--------|----------|----------|-----------|-----------|----------|
| 0 | 0. | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0. | | | | | | | |
| 1 | 0. | 1. | 0. | | | | | | |
| 3 | 0. | 1. | 2. | 0. | | | | | |
| 15 | 0. | 1. | 8. | 6. | 0. | | | | |
| 105 | 0. | 1. | 22. | 58. | 24. | 0. | | | |
| 945 | 0. | 1. | 52. | 328. | 444. | 120. | 0. | | |
| 10395 | 0. | 1. | 114. | 1452. | 4400. | 3708. | 720. | 0. | |
| 135135 | 0. | 1. | 240. | 5610. | 32120. | 58140. | 33984. | 5040. | 0. |
| 2027025 | 0. | 1. | 494. | 19950. | 195800. | 644020. | 785304. | 341136. | 40320. |
| 34459425 | 0. | 1. | 1004. | 67260. | 1062500. | 5765500. | 12440064. | 11026296. | 3733920. |
| | | | | | | | | | 362880. |

Man sieht erstens, daßs dieses zweyte Dreyeck die nähmliche Basis als das erste, nähmlich 0 1, vertical gestellt, hat, da diese Basis die immerwährende Basis aller nähmlichen Dreyecke in's Unendliche ist.

2) Daßs es mittelst dieser Basis ist, daßs man dieses Dreyeck bildet.

3) Daßs die zwey ersten Wurzeln wieder die nähmlichen Elemente sind, auf die Querlinie gestellt.

4) Daßs die dritte Wurzel gleich ist, wie immer, der Wievielheit (Quotität) des Dreyeckes.

5) Daßs die Differenz der zweyten und dritten Wurzel die Differenz der übrigen Wurzeln bestimmt.

6) Daßs die Summe jeder Horizontalreihe, vertical versetzt, gleich ist der correspondirenden Zahl, die außerhalb dem Dreyecke gestellt ist.

7) Daßs diese Zahlen eine Reihe bilden, die hervor gebracht ist durch die Multiplication der Glieder der folgenden Reihe 1. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. u. s. w., deren Differenz der Glieder gleich ist, wie immer, der Wievielheit (Quotität) des Dreyeckes; die Elemente 1. 1 als die zwey ersten Glieder angenommen.

8) Daßs endlich die Formel gleich ist derjenigen des ersten Elementar-Dreyeckes, wie sie es immer für alle übrige seyn wird.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen wird man leicht diese Dreyecke bilden können.

Gebrauch des zweyten Dreyeckes der Elementaren.

Man hat gesehen, daß das erste Elementar-Dreyeck die Elementaren der Potenzen in seinen horizontalen Reihen, vertical gestellt, von der rechten Seite anzufangen, gegeben hat.

Dieses zweyte Dreyeck gibt in seinen auf die nämliche Weise gestellten Horizontalreihen die Elementaren der Coefficienten der Formeln, welche dazu dienen, um jedes Glied des ersten additionellen Dreyeckes, das ich vorher gegeben habe, zu finden.

Aus diesen Elementaren werde ich nun Dreyecke bilden, die ich *Dreyecke der Coefficienten* nennen werde.

Dreyecke der Coefficienten.

Erste Coefficienten.

| | |
|-------------------------------|---|
| 0. | : |
| I. 0 | |
| 0. 1. 0. | |
| 0. 1. 1. 0. | |
| 0. 1. 2. 1. 0. | |
| 0. 1. 3. 3. 1. 0. | |
| 0. 1. 4. 6. 4. 1. 0. | |
| 0. 1. 5. 10. 10. 5. 1. 0. | |
| 0. 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1. 0. | |

Zweyte Coefficienten.

| | |
|-------------------------------|---|
| 0 | : |
| I. 0. | |
| 0. 1. 0. | |
| 0. 1. 1. 0. | |
| 0. 1. 2. 1. 0. | |
| 0. 1. 3. 3. 1. 0. | |
| 0. 1. 4. 6. 4. 1. 0. | |
| 0. 1. 5. 10. 10. 5. 1. 0. | |
| 0. 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1. 0. | |

Dritte Coefficienten.

| | |
|--|---|
| 0. | : |
| 2. 0. | |
| 1. 2. 0. | |
| 0. 3. 2. 0. | |
| 0. 3. 5. 2. 0. | |
| 0. 3. 8. 7. 2. 0. | |
| 0. 3. 11. 15. 9. 2. 0. | |
| 0. 3. 14. 26. 24. 11. 2. 0. | |
| 0. 3. 17. 40. 50. 35. 13. 2. 0. | |
| 0. 3. 20. 57. 90. 85. 48. 15. 2. 0. | |
| 0. 3. 23. 77. 147. 175. 133. 63. 17. 2. 0. | |
| 0. 3. 26. 100. 224. 322. 308. 196. 80. 19. 2. 0. | |

Viele Coefficienten.

| | | | | | | | | | |
|----|-----|------|-------|-------|----|--|--|--|--|
| 0. | 1. | 0. | | | | | | | |
| 1. | 1. | 0. | | | | | | | |
| 1. | 3. | 2. | 0. | | | | | | |
| 1. | 6. | 11. | 6. | 0. | | | | | |
| 1. | 10. | 35. | 50. | 24. | 0. | | | | |
| 1. | 15. | 85. | 225. | 274. | | | | | |
| 1. | 21. | 175. | 735. | 1624. | | | | | |
| 1. | 28. | 322. | 1960. | 6769. | | | | | |

Weil ich aber nur 5 Dreyecke verfertiget habe, so kann ich nur fünf vollständige Formeln haben; und es ist in den fünf ersten Horizontalreihen dieser Vereinigung, daß man die Coefficienten sieht, die die verschiedenen Glieder dieser Formeln multipliciren: Formeln, welche mit den fünf ersten Diagonalreihen des oben gebildeten ersten additionellen Dreyeckes correspondiren werden.

Und weil der Werth jedes Gliedes dieses additionellen Dreyeckes von seiner Lage abhängt, und folglich von der Zahl, welche die so wohl horizontale als verticale Wievielheit (Quotität) jedes Gliedes angibt, so werden es diese Coefficienten seyn, welche diese Zahlen, zu einer der Lage der Coefficienten in dieser Vereinigung analogen Potenz erhoben, multipliciren werden, deren Exponent gleich seyn wird der Verticalanzahl der Glieder des Coefficienten, weniger das aus 0 bestehende Glied, so sich dabey befinden könnte.

Folglich wird man diese Coefficienten folgender Weise in Formeln bringen können.

$$\begin{aligned}
 & 1n^0 \\
 & 1n^1 + 0n^0 \\
 & 1n^2 + 1n^1 + 0n^0 \\
 & 1n^3 + 3n^2 + 2n^1 + 0n^0 \\
 & 1n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n^1 + 0n^0 \\
 & 1n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n^1 + 0n^0
 \end{aligned}$$

Hernach wenn man jeder Formel die Summe ihrer Coefficienten als Divisor gibt, welche Summe immer gleich seyn wird dem letzten Coefficienten der folgenden Formel, nämlich einer der berühm-

ten Zahlen 1. 2. 6. 24. 120. u. s. w. So wird man alle Glieder der Diagonalreihe (welche der Wievielheit der Formel correspondirt) des ersten additionellen Dreyeckes bestimmen.

Wollte man zum Beyspiel das neunte Glied der sechsten Diagonalreihe des ersten additionellen Dreyeckes kennen; Reihe, welche bestimmt wird, durch die sechste Formel nähmlich

$$\text{Glieder} = (1n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n) \div 120$$

$$\underline{1287 = 1 \times 9^5 + 10 \times 9^4 + 35 \times 9^3 + 50 \times 9^2 + 24 \times 9}$$

120

$$\begin{array}{r} 1 \times 9^5 = 59049 \\ 10 \times 9^4 = 63610 \\ 35 \times 9^3 = 25515 \\ 50 \times 9^2 = 4050 \\ 24 \times 9 = 216 \\ \hline 120 \quad 154440 \quad \bigg| \quad 120 \\ \quad 344 \quad 1287 \\ \quad 1044 \\ \quad 840 \\ \quad \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

Dieses Beyspiel wird hinlänglich seyn, um alle andere Glieder zu finden, und man sieht dadurch, daß, um einen genauen Divisor zu haben, man die Einheit nicht vernachlässigen soll, die als Coefficient den ersten Theil der Formel afficirt.

Ueberhaupt muß man genau den Mechanismus der Berechnung folgen, ohne etwas zu hinterlassen, unter dem Vorwande, daß es unnöthig sey, weil die Berechnung solches nicht kennt.

Ich werde noch auf diese Formeln zurück kommen, ich muß aber vorher das dritte und vierte *Elementar-Dreyeck* bilden, obschon ich ihren Nutzen nicht kenne, aber nur um den Mechanismus der Berechnung zu beobachten.

Drittes Elementar-Dreyeck.

$$\text{Glied} = p'(\bar{n}-1) + d^5r + d^3r'(\bar{n}-2)$$

| | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|---------|---|---|-----|-------|--------|--------|--------|--------|----|
| 0 | 0 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | | | | | |
| 28 | 0 | 1 | 12 | 15 | 0 | | | | |
| 280 | 0 | 1 | 33 | 141 | 105 | 0 | | | |
| 3640 | 0 | 1 | 78 | 786 | 1830 | 945 | 0 | | |
| 58240 | 0 | 1 | 171 | 3450 | 17538 | 26685 | 10395 | 0 | |
| 1106560 | 0 | 1 | 360 | 13257 | 125352 | 396495 | 435960 | 135135 | 0 |

Viertes Elementar-Dreyeck.

$$\text{Glied} = p'(\bar{n}-1) + d^5r + d^3r'(\bar{n}-2)$$

| | 0 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 21 |
|---------|---|---|-----|-------|--------|---------|---------|---------|----|
| 0 | 0 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | | | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 4 | 0 | | | | | |
| 45 | 0 | 1 | 16 | 28 | 0 | | | | |
| 585 | 0 | 1 | 44 | 260 | 280 | 0 | | | |
| 9945 | 0 | 1 | 104 | 1440 | 4760 | 3640 | 0 | | |
| 208845 | 0 | 1 | 228 | 6296 | 44960 | 99120 | 58240 | 0 | |
| 5221125 | 0 | 1 | 480 | 24132 | 318352 | 1439760 | 2331840 | 1106560 | 0 |

Es wird jedem Mathematiker leicht seyn einzusehen, daß diese zwey letzten Elementar-Dreyecke so gebildet worden sind, wie sie es seyn sollten, auf die Basis, so die Berechnung für die beyden ersten fest gesetzt hat: von der Unwissenheit ihres Gebrauches auf ihre Unnützbarkeit schließen zu wollen, wäre eine Pflanze, deren

Wirkungen noch unbekannt sind, auf die bloße Vegetation beschränken.

Wäre aber auch ihr Gebrauch bekannt, so müßte man dennoch auf die Formeln, die ich eben verlassen habe, zurück kommen.

Man hat gesehen, wie leicht die Coefficienten der drey ersten Formeln sich mit Hülfe der Elementaren, der Wurzeln und der Formel hervor bringen lassen; allein man hat ebenfalls gesehen, daß die Schwierigkeit im doppelten Verhältnisse der natürlichen Zahlen zunahm: so daß der erste Coefficient der 12ten Formel sich nur in der 24ten Vertical-Reihe des Dreyeckes der Coefficienten wieder hervor bringen würde; in dem man immer den materiellen Fehlern einer langweiligen Addition ausgesetzt ist, denen die Mathematiker mehr, als denjenigen der Beurtheilung unterworfen sind, und die desto unangenehmer sind, weil sie keine andere Controle als eine noch langweiligere Wiederholung haben.

Es ist daher wahrscheinlich, daß die Berechnung sie nicht hat nöthigen wollen, diese Coefficienten aus dem Labyrinth einer fast unendbaren Addition zu ziehen, ob schon dieses Labyrinth weniger geeignet ist, um sich darin zu verirren, als in demjenigen der Reihen.

Es war wahrscheinlich, daß die Berechnung durch die leichte Angabe der drey ersten Formeln ihnen den Weg gebahnt hatte, um die übrigen mit weniger Mühe zu finden, wie sie es wirklich mittelst der *Formular - Dreyecke* gethan hat.

Von den Formular-Dreyecken

und erstens von dem ersten Formular-Dreyecke, welches die Glieder des ersten additionellen Dreyeckes bestimmt.

Die Berechnung hat dieses Dreyeck auf eine sehr sonderbare Weise verfertigt, mittelst der Elemente, als Basis diagonal gestellt ^o und der folgenden Formel: $\text{Glieder} = p + d (n + \bar{n} - 3)$

Mit ihrer Hülfe wird man alle Coefficienten finden, wie man sie in der obigen Vereinigung gesehen hat.

Allein weil der Multiplikator des Diagonalgliedes, $\binom{v}{n} + \bar{n} - 3$ gleich ist der Reihe 0. 1. 2. 3. 4. u. s. w. vertical längst der geraden Linie neben dem Dreyecke zu stellen, wenn man jedes Glied dieser Reihe als die Wurzel jeder Horizontalreihe des Dreyeckes ansieht, und man in der Formel diese Wurzel dem Multiplikator $\binom{v}{n} + \bar{n} - 3$ substituirt, so wird die obige Formel in folgende verändert werden:
 Glied $= p^v + d^d r^d$

Wenn man nun diese Formel anwendet auf die Elemente als Basis, diagonal gestellt ¹ o, so wird das Formular-Dreyeck dergestalt gebildet seyn, daß man die Formeln eben so leicht wird lesen können, als ob sie in ihrem ganzen algebraischen Ausdrücke niedergeschrieben wären.

Erstes Formular-Dreyeck.

$$\text{Glieder} = p^v + dr^d.$$

| | | | | | | | | | | |
|----|----|-----|------|-------|--------|---------|---------|----------|----------|------------|
| 0 | 1 | Δ1 | | | | | | | | |
| 1 | 1. | O. | Δ1 | | | | | | | |
| 2 | 1. | 1. | O. | Δ2 | | | | | | |
| 3 | 1. | 3. | 2. | O. | Δ6 | | | | | |
| 4 | 1. | 6. | 11. | 6. | O. | Δ24 | | | | |
| 5 | 1. | 10. | 35. | 50. | 24. | O. | Δ120 | | | |
| 6 | 1. | 15. | 85. | 225. | 274. | 120. | O. | Δ720 | | |
| 7 | 1. | 21. | 175. | 735. | 1624. | 1764. | 720. | O. | Δ5040 | |
| 8 | 1. | 28. | 322. | 1960. | 6769. | 13138. | 13068. | 5040. | O. | Δ40320 |
| 9 | 1. | 36. | 546. | 4536. | 26449. | 67284. | 118124. | 109584. | 40320. | O. Δ362880 |
| 10 | 1. | 45. | 870. | 9450. | 63273. | 296325. | 723680. | 1172700. | 1026576. | 362880. |

Man sieht also, daß, wenn man mit Hülfe dieser Wurzeln, als Exponenten, zum Beyspiel die siebente Formel in ihrem ganzen al-

gebraischen Ausdrücke lesen will, man es auf folgende Weise thun werde: jedes Glied der siebenten Diagonalreihe des ersten *additionellen Dreyeckes* ist $= 1n^6 + 15n^5 + 85n^4 + 225n^3 + 274n^2 + 120n$; das Ganze dividirt durch 720, Summe der Coefficienten; indem man durch n die Anzahl der Diagonalglieder des nämlichen Dreyeckes versteht.

Folglich sieht man, daß diese Bildung nicht allein die Coefficienten, sondern auch die Exponenten und die Divisoren jeder Formel gibt, und daß man ihr daher mit Recht den Nahmen *Formular-Dreyeck* gegeben hat, so wie man die Formel, durch welche man es bildet, *Mutter-Formel* nennen könnte.

Wenn man diese Formel so geordnet haben wollte, daß sie zu gleicher Zeit den Coefficienten ihre Multiplicatoren, diesen ihre Exponenten, und beyden ihre Divisoren angäbe, so müßte man die Formel folgender Weise ausdrücken:

$$\text{Glieder} = \binom{v}{p+d} \frac{a^v}{N^{n-1}} \Delta S^{CF}$$

Das heißt: *jedes Glied des ersten Formular-Dreyeckes ist gleich dem vorhergehenden Verticalgliede des nämlichen Dreyeckes; mehr dem Diagonalgliede, multiplicirt mit der Wurzel des Diagonalgliedes: das Ganze multiplicirt mit der Zahl, welche die Wievielheit (Quotität) des Diagonalgliedes des ersten additionellen Dreyeckes angibt; diese Zahl zu einer Potenz erhoben, die gleich ist der Zahl, so die verticale Wievielheit weniger 1 des gesuchten Gliedes angibt; das Ganze dividirt durch die Summe der Coefficienten der ganzen Formel.*

Wenn man nun den algebraischen Ausdruck dieser letzten Formel mit ihrem grammatikalischen Ausdrucke vergleicht, so wird man überzeugt seyn, daß der erste, wenn man nur die Zeichen kennt, sogleich ihren ganzen Werth dem Geiste darstellt; da man im Gegentheile den anderen mehrmahlen wiederhohlen, ja sogar studieren soll.

Es war um diesen algebraischen Ausdruck und andere, mit der Form eines Bruches unvereinbare, Ausdrücke zu behalten, daß ich ein neues Divisions-Zeichen habe gebrauchen müssen, nämlich das Zeichen Δ , das ein abgeschnittenes D vorstellt, und dessen ich mich

in das Künftige als Divisions-Zeichen bedienen werde, und das *dividirt* bedeuten wird, so wie $\times$ *multiplicirt* bedeutet.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, welche Wichtigkeit die Berechnung allen denjenigen, so das erste *additionelle* Dreyeck betrifft, scheint gegeben zu haben;

Denn: 1. eignet sie ihm die durch den berühmten *Pascal* bemerkte Eigenschaften zu.

2. Sie macht, um so zu sagen, aus ihm den Talisman aller Zahlenzusammensetzungen.

3. Sie verfertiget seinetwegen die Elementar-Dreyecke.

4. Sie wiederhohlt ihn zwey Mahl in der Verfertigung jeder dieser Dreyecke.

5. Sie theilt ihm die oben erwähnten Eigenschaften mit.

6. Sie ordnet seinetwegen auf eine sonderbare Weise das erste Formular-Dreyeck.

7. Sie gibt selbst in den zwey letzten Gliedern seiner Horizontal-Reihen die Basen aller *additionellen Dreyecke* in das Unendliche an.

8. Endlich verfertiget sie auf eine noch sonderbarere Weise ein allgemeines Formular-Dreyeck, dessen jede Formel bestimmt und fest setzt, in allen *additionellen Dreyecken* in das Unendliche, alle Glieder aller Diagonalreihen einer der Formel gleichen Wievielheit (Quotität); so, daß jede Formel eine unendliche Menge von Gliedern, zu der unendlichen Potenz erhoben, bestimmt und fest setzt.

Folglich, bevor ich auf die Verfertigung dieses *allgemeinen Formular-Dreyeckes* komme, muß ich ein Wort von denjenigen der übrigen *additionellen Dreyecke* sagen.

Bildung der übrigen additionellen Dreyecke.

Die Basen und Elementaren aller *additionellen Dreyecke* in das Unendliche sind, wie eben gesagt worden, durch das erste dieser

Dreyecke gegeben, nämlich in den zwey letzten Ziffern seiner Horizontalreihen.

Folglich werden die Elementaren seyn:

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. u. s. w.

Die auf einander folgenden Bases werden den natürlichen Zahlen, so wie der respectiven Wievielheit (Quotität) jedes additionellen Dreyeckes gleich seyn.

Es wird daher leicht seyn, diese Dreyecke zu verfertigen, deren ich hier nur die Skizzen des 2ten, 3ten und 4ten geben werde.

*Zweytes additionelles
Dreyeck.*

1.
1.1.
0.2. 1.
0.2. 3. 1.
0.2. 5. 4. 1.
0.2. 7. 9. 5. 1.
0.2. 9.16.14. 6. 1.
0.2.11.25.30.20. 7.1.
0.2.13.36.55.50.27.8.1.

*Drittes additionelles
Dreyeck.*

1.
2.1.
0.3. 1.
0.3. 4. 1.
0.3. 7. 5. 1.
0.3.10.12. 6. 1.
0.3.13.22.18. 7. 1.
0.3.16.35.40.25. 8.1.
0.3.19.51.75.65.33.9.1.

*Viertes additionelles
Dreyeck.*

1.
3.1.
0.4. 1.
0.4. 5. 1.
0.4. 9. 6. 1.
0.4.13.15. 7. 1.
0.4.17.28.22. 8. 1.
0.4.21.45.50.30. 9. 1.
0.4.25.66.95.80.39.10.1.

Diese Skizzen werden hinlänglich seyn: man wird sie immer nach Belieben ergänzen, und so viele andere, als man will, verfertigen können.

Nur muß ich hier bemerken, daß die vorher für die Dreyecke der Potenzen erwähnten Eigenschaften sich ebenfalls für diese Dreyecke, und folglich für alle additionelle Dreyecke in das Unendliche bestätigen; Eigenschaften, die, wie man gesehen hat, dem Einflusse der Elemente in diese Dreyecke zuzuschreiben sind.

Vorläufige Bemerkungen über das allgemeine Formular-

Dreyeck aller additionellen Dreyecke in das Unendliche.

Man hat vorher gesehen, daß die Elemente sich auf verschiedene

Arten zusammen setzen und ordnen: man hat sie gesehen als 1 0; man hat sie gesehen als die Summe von $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$ und also als 1 1; man hat sie auch gesehen, als die Summe von $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, das heißt, als 2; hier in diesem allgemeinen *Formular-Dreyecke* wird man sie als die zusammengesetzte Basis von $\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}$ sehen, nicht horizontal wie 1 1, sondern diagonal, wie $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ gestellt; und diese Basis, was sonderbar ist, wird außerhalb dem Dreyecke gestellt seyn,

Diese Stellung hat die Verdoppelung der Glieder jeder Formel verursacht, deren gerade Coefficienten sich nach einem Gesetze ordnen, das von demjenigen, nach dem sich die ungeraden Coefficienten bilden, verschieden ist; ich sage *gerade* und *ungerade* in Beziehung auf die horizontale Stellung.

Die Verwicklung, welche aus der Schwierigkeit entspringt, alle natürliche Zahlen unter ein nähmliches Gesetz, und diese nähmliche Zahlen unter verschiedene Gesetze zu ordnen, hat ungerade negative Coefficienten, und positive ebenfalls ungerade Coefficienten erfordert, welche letzte mit der Basis des additionellen Dreyeckes, dessen Glieder man sucht, afficirt sind.

Die geraden Coefficienten sind alle positiv, und afficiren die Basis des additionellen Dreyeckes, dessen Glieder man sucht.

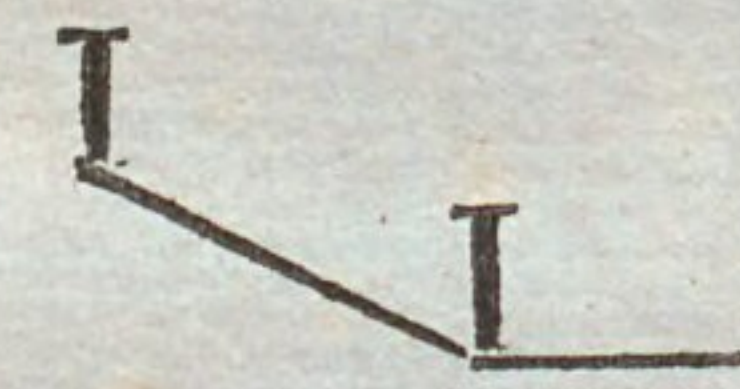
Allein sie mögen positiv oder negativ seyn, so wird die Berechnung sie immer hervor bringen, mit sammt ihren respectiven Zeichen durch die einzige Basis $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ auf die Formel angewendet, und auf die Spitze außerhalb dem Dreyecke gestellt. Weil, wenn sie innerhalb dem Dreyecke gestellt wäre, sie nicht durch die Formel die Multiplicatoren hätte empfangen können, welche die 2te Elementare als Coefficient afficiren mußte.

Unter dem Schutze dieser kurzen Bemerkungen und der Basis, kann ich die Ordnung dieses Dreyeckes, so wie die Berechnung es gebildet zu haben scheint, anfangen, mit der Deutung, daß die römischen Hauptbuchstaben, die sich in der Formel befinden werden, in der Bildung des Dreyeckes bloß angezeigt werden müssen.

Bildung des allgemeinen Formular - Dreyeckes.

Formel: jedes Glied des allgemeinen Formular - Dreyeckes ist gleich

$$\left(\left(\overset{\bar{p}\bar{\pi}}{p} + \overset{\bar{p}\bar{\pi}}{d} (e-2) \right) \overset{T\Delta}{N}^{\overset{\Delta FG}{n-1}} + \left(\overset{\bar{p}\bar{\pi}}{p} + \overset{\bar{p}\bar{\pi}}{d} (e-1) \right) + \overset{\bar{p}\bar{\pi}}{d} (e-1) - \overset{\bar{p}\bar{\pi}}{d} (e-1) \right) \overset{T\Delta}{N}^{\overset{\Delta FG}{n-1}} \overset{C.POS.C.NEG.}{B} \Delta (S-S)$$


 $1N^0$

$$1N^1 + 1N^0B - 1N^0 \overset{C.POS.C.NEG.}{\Delta} (S-S)$$

$$1N^2 + 2N^1B - 1N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^3 + 3N^2B - 0N^2 + 3N^1B - 1N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^4 + 4N^3B + 2N^3 + 12N^2B - 1N^2 + 8N^1B - 2N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^5 + 5N^4B + 5N^4 + 30N^3B + 5N^3 + 55N^2B - 5N^2 + 30N^1B - 6N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^6 + 6N^5B + 9N^5 + 60N^4B + 25N^4 + 210N^3B + 15N^3 + 300N^2B - 26N^2 + 144N^1B - 24N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^7 + 7N^6B + 14N^6 + 105N^5B + 70N^5 + 595N^4B + 140N^4 + 1575N^3B + 49N^3 + 1918N^2B - 154N^2 + 840N^1B - 120N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^8 + 8N^7B + 20N^7 + 168N^6B + 154N^6 + 1400N^5B + 560N^5 + 5880N^4B + 889N^4 + 12992N^3B + 140N^3 + 14112N^2B - 1044N^2 + 5760N^1B - 720N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^9 + 9N^8B + 27N^8 + 252N^7B + 294N^7 + 2898N^6B + 1638N^6 + 17640N^5B + 4809N^5 + 60921N^4B + 6363N^4 + 118188N^3B - 64N^3 + 117612N^2B - 8028N^2 + 4536N^1B - 5040N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben}$$

$$1N^{10} + 10N^9B + 35N^9 + 360N^8B + 510N^8 + 5460N^7B + 3990N^7 + 45360N^6B + 17913N^6 + 224490N^5B + 44835N^5 + 672840N^4B + 50840N^4 + 1181240N^3B - 8540N^3 + 1095840N^2B - 69264N^2 + 403200N^1B - 40320N^1 + 0N^0B - 0N^0 \Delta \text{ wie oben.}$$

Algebra: Formeln: Dreyer

Formeln: Dreyer

$A(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)$



C. P. O. C. N. E.

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$ wie oben

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

$1N + 1NB - 1N - 2(1-2)$

Erklärung der algebraischen Zeichen.

- $\overline{p}^{\pi}$ bedeutet: vorhergehender Vertical-Coefficient, der horizontaliter ungerade ist.
- $\overline{p}^{\pi}$
 $\overline{d}$ Der Coefficient, der diagonal ist dem vorhergehenden, horizontaliter geraden Coefficienten.
- $\overline{e}$ Der erste horizontale Exponent.
- $T \triangle_a N \quad V \triangle_{n-1} FG$ Die Anzahl der Glieder des additionellen Dreyeckes, erhoben zu einer Potenz, die gleich sey der Anzahl der verticalen Glieder, weniger eins, dieses allgemeinen Dreyeckes.
- $\overline{p}^{\pi}$
 $\overline{p}$ Der vorhergehende Vertical-Coefficient, der horizontaliter gerade ist.
- $\overline{p}^{\pi}$
 $\overline{d}$ Der Coefficient, der diagonal ist dem vorhergehenden horizontaliter ungeraden Coefficienten,
- B Die Basis des additionellen Dreyeckes, dessen Glieder jede Formel bestimmen soll.
- $\binom{CP}{S-S} \binom{CN}{S}$ Die Summe der positiven, weniger die Summe der negativen Coefficienten.

Bemerkungen.

- 1) Die Formel bestehet aus zwey Theilen, deren erster, der der ungerade Theil ist, nur zwey Glieder hat, die mit N^{n-1} multiplicirt sind, und deren zweyter, der der gerade Theil ist, vier Glieder hat, die mit $N^{n-1}B$ multiplicirt sind; beyde Theile sind durch $\binom{CP}{S-S} \binom{CN}{S}$ dividirt.
- 2) Die Formel ist dergestalt gebildet, daß der ungerade Theil, das heisst der erste, nur auf die gesuchten ungeraden Glieder anwendbar ist; und daß der gerade Theil, das heisst der zweyte, nur auf die geraden Glieder anwendbar ist.
- 3) Es ist daher unnöthig die Anwendung des ersten Theiles auf die geraden Glieder, und diejenigen des zweyten Theiles auf die ungeraden Glieder zu versuchen.
- 4) Die Factoren N und B müssen immer vom additionellen Dreyecke,

auf welches man die Formeln dieses Formular-Dreyeckes anwenden will, verstanden werden.

5) Jede Formel dieses Dreyeckes wird alle Glieder der Diagonal-Reihe, deren Wievielheit gleich seyn wird der Wievielheit der Formel, in's Unendliche bestimmen in allen additionellen Dreyecken, die zur Basis die natürlichen Zahlen, und zur ersten Elementare die Einheit haben; so, daß jede Formel eine unendliche Menge von Gliedern, zu der unendlichen Potenz erhoben, bestimmen wird.

6) In der Anzahl der Glieder des additionellen Dreyeckes muß man die erste Verticalreihe dieses Dreyeckes, die nur aus den Elementaren gefolgt, mit Nullen bestehet, nicht mitrechnen; und das geschieht, um die Formeln zu vereinfachen, die ohne dieß die Anzahl der Glieder durch $N-1$ (das der wahre Ausdruck ist) hätten ausdrücken sollen.

7) Es ist wesentlich die Glieder $oN^{\circ}B$ und oN° nicht wegzulassen, weil sie helfen die Potenz bestimmen, auf welche N erhoben werden muß, und dieß wird evident, wenn man betrachtet,

8) daß die successive Wievielheit der Formeln sich nach der Reihe 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. s. w. bestimmt.

9) Die auf einander folgenden Divisoren der Formeln sind wieder die berühmten Zahlen 1. 1. 2. 6. 24. 120. 720. 5040 u. s. w., deren erste Einheit das Element, und die zweyte die erste natürliche Zahl ist.

10) Man sieht daraus, daß in der Mathematik nichts Wesentliches und Verwickeltes, ohne besondern Einfluß des Elementes, Statt findet. Es wäre überflüssig zu bemerken, daß die Diagonalreihen in der Richtung von der Linken nach der Rechten genommen werden.

*Anwendung der Erläuterungen über die Verfertigung
des allgemeinen Formular-Dreyeckes, aller additionellen Drey-
ecke in's Unendliche, die mit zwey Elementaren, wovon die
erste die Einheit ist, versehen sind.*

Bevor ich diese Erläuterungen auf die Bildung dieses Dreyeckes anwende, wird es nicht unnöthig seyn, wegen seiner Verwicklung, hier den grammatikalischen Ausdruck der Formel, die ihn bildet, nieder zu

schreiben, ungeachtet der Erklärung der algebraischen Zeichen, die ich eben gegeben habe; hier ist dieser Ausdruck:

Jedes Glied des allgemeinen Formular-Dreieckes ist gleich dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter ungerade ist.

Mehr dem Coefficienten, der diagonal ist dem vorhergehenden, horizontaliter geraden Coefficienten: multiplicirt mit dem ersten horizontalen Exponenten, weniger 2.

Diese beyden Glieder multiplicirt mit N Anzeigungsbuchstabe der Diagonalanzahl der Glieder des additionellen Dreieckes: dieser Anzeiger zu einer Potenz erhoben, die gleich ist der Anzahl der Glieder, weniger 1, die vertical stehen mit dem in diesem Formular-Dreiecke gesuchten Gliede.

Mehr, dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter gerade ist.

Mehr, dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter gerade ist, dividirt durch den ersten horizontalen Exponenten weniger eins.

Mehr dem Coefficienten, der diagonal ist dem vorhergehenden, horizontaliter ungeraden Coefficienten, multiplicirt mit dem ersten Exponenten weniger eins.

Weniger dem Coefficienten, der diagonal ist dem vorhergehenden, horizontaliter ungeraden Coefficienten, dividirt durch den ersten horizontalen Exponenten weniger eins.

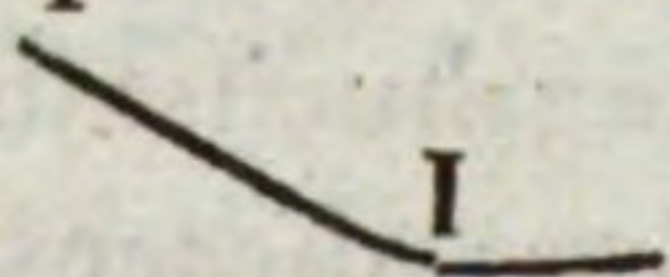
Diese vier Glieder multiplicirt mit N Anzeigungsbuchstabe der Diagonalanzahl der Glieder des additionellen Dreieckes: dieser Anzeiger, zu einer Potenz erhoben, die gleich ist der Anzahl der Glieder, weniger eins, die vertical stehen mit dem in diesem Formular-Dreiecke gesuchten Gliede: dieser dergestalt erhobene Anzeiger multiplicirt mit B anderer Anzeigungsbuchstabe der Basis der additionellen Dreiecke.

Das Ganze dividirt durch die Summe der positiven, weniger die Summe der negativen Coefficienten.

Wenn man nun den algebraischen Ausdruck mit diesem vergleicht, so wird man überzeugt seyn von dem Vorzuge, so der erstere verdienet, wenn man nur einmahl seine Zeichen verstanden hat, weil sie in einem Ueberblicke dem Geiste ihren ganzen Ausdruck darstellt.

Nun schreite ich zur Verfertigung dieses Dreyeckes, in so fern es nöthig seyn wird, um davon einen hinlänglichen Begriff zur Ergänzung des Ueberrestes zu geben.

1) Ich stelle das Element zwey Mahl diagonal von der Linken nach der Rechten abwärts, scheide sie durch eine Linie von dem zu bildenden Dreyecke, und betrachte sie als zwey Coefficienten, wie man hier sieht: I



2) Da das erste Glied, das ich finden soll, ungerade ist, so wende ich den ersten ebenfalls ungeraden Theil der Formel auf ihn an, und ich sage: das Glied, das ich finden soll, ist gleich, $\overline{p^{\nu\pi}}$, das heisst, dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter ungerade ist. Weil aber dieser Coefficient 1 ist, so sehe ich, daß das Glied $\overline{p^{\nu\pi}}$ mir 1 gibt: was ich aufmerke.

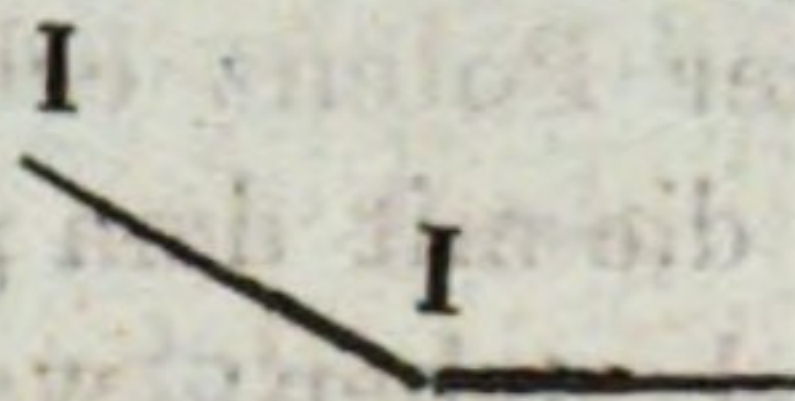
3) Ich schreite nun zum zweyten Gliede des ersten Theiles der Formel, und ich sage: das Glied, das ich finden soll, ist ebenfalls gleich $\overline{p^{\pi}} \times (e-2)$ das heisst: dem Coefficienten, der diagonal ist dem vorhergehenden horizontaliter geraden Coefficienten, multiplicirt mit dem ersten horizontalen Exponenten, weniger 2; weil aber das Glied, das ich finden soll, keinen vorhergehenden horizontalen Coefficienten hat, und folglich dieser keinen diagonalen Coefficienten: so schliesse ich daraus, daß dieses Glied mir nur 0 gibt.

4) Und weil die übrigen vier Glieder des zweyten Theiles, der gerade Theil ist, auf das ungerade Glied, das ich suche, unanwendbar sind; so habe ich nur 1, das ich mit N Anzeigungsbuchstabe der Anzahl der Glieder der additionellen Dreyecke multiplicire; welche Multiplication mir $1N$ gibt.

5) Ich soll nun $1N$ zu einer Potenz erheben, die gleich sey der Anzahl der Glieder weniger 1, die in diesem Dreyecke mit dem gesuchten Gliede vertical stehen; nun ist diese Zahl gleich 1; ich soll daher N auf die erste Potenz weniger 1 erheben, die $= 0$ ist.

6) Folglich werde ich haben $1N^0$ für das Glied, das ich finden

soll; und das ich unter das erste Element der Basis, wie hier unten, stelle.



Und weil es evident ist, daß alle übrige Glieder N^0 der vertical abwärts laufenden ersten Reihen nothwendiger Weise gleich seyn werden, nur mit dem Unterschiede, daß die Potenz von N sich nach und nach um 1 vermehren wird, so erspare ich mir die Mühe sie zu suchen, und drücke sie aus, wie man hier sieht.

Ich habe nun das erste Glied der zweyten Verticalreihe zu finden, und weil dieses erste Glied horizontaliter gerade ist, so wende ich auf ihn den geraden Theil der Formel an:

1. Folglich sage ich: das Glied, das ich dort finden soll ist $= p^{\pi}$, das heist: dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter gerade ist; weil nun dieser Coefficient die zweyte Einheit der Basis ist, so sehe ich, daß das Glied p^{π} mir schon + 1 gibt; was ich aufmerke.

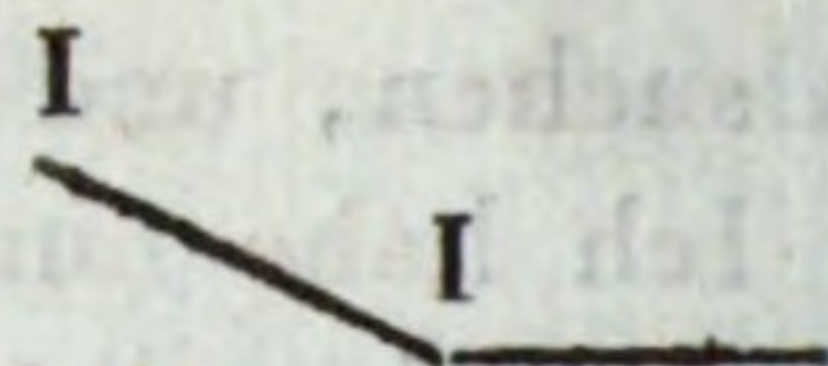
2. Und weil das Glied, das ich finden soll, noch gleich ist $p^{\pi} \Delta (\bar{e} - 1)$ das heist: dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter gerade ist, dividirt durch den ersten horizontalen Exponenten weniger 1; so suche ich es zu benutzen: ich sehe gleich, daß es mir $\Delta (\bar{e} - 1)$ gibt; weil aber der erste horizontale Exponent dieses Mahl $= 0$ ist; folglich habe ich $\Delta 0$; Division, die unmöglich ist; folglich $p^{\pi} \Delta (\bar{e} - 1)$ gibt mir nichts.

3. Ich gehe nun zu den übrigen Gliedern des zweyten Theiles der Formel über, welche sind $+ d^{\pi} \times (\bar{e} - 1) - d^{\pi} \Delta (\bar{e} - 1)$, und ich sehe gleich, daß, da das Glied, das ich finden soll, horizontaliter gerade ist, es wohl einen vorhergehenden horizontaliter geraden Coefficienten hat, allein dieser hat keinen diagonalen; folglich sind diese zwey letzten Glieder dieses Mahl 0.

Ich habe folglich aus den vier Gliedern des geraden Theiles der Formel nur + 1 gezogen.

Ich multiplicire $+ 1$ mit N Anzeigungsbuchstabe der Diagonal-Anzahl der Glieder der additionellen Dreyecke, dieser Buchstabe zu einer Potenz erhoben, die gleich ist der Anzahl der Glieder weniger 1, die mit dem gesuchten Gliede in diesem Formular-Dreyecke vertical stehen; weil aber diese Vertical-Anzahl gleich 1 ist, so muß ich N zu der ersten Potenz weniger 1 erheben.

Ich werde folglich $+ 1 N^0$ haben für das Glied, das ich finden soll; und ich stelle es unter das zweyte Element der Basis, nachdem ich es mit B Anzeiger der Basis der additionellen Dreyecke, multiplicirt habe; wie man hier sieht.



Und weil es evident ist, daß alle übrige Glieder der zweyten vertical abwärts laufenden Reihe keinen anderen Unterschied haben werden, als daß die Coefficienten und die Potenzen des N sich nach und nach um 1 vermehren werden; so erspare ich mir die Mühe, sie zu suchen, und drücke sie aus, wie hier.

Ich habe nun das erste Glied der dritten Verticalreihe dieses Dreyeckes, welches das dritte Glied der 2ten Formel ist, zu finden.

1. Weil dieses Glied horizontaliter ungerade ist, so sehe ich gleich, daß es der ungerade Theil der Formel, das heißt, der erste ist, der allein auf ihn angewendet werden kann.

2. Folglich fange ich an, das Glied dieses ungeraden Theiles auf ihn anzuwenden, und ich sage: das Glied, das ich suche, ist gleich $\overline{p}^{\overline{\pi}}$, das heißt: dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter ungerade ist; weil aber das Glied, das ich finden soll, keinen vorhergehenden Vertical-Coefficienten hat, so sehe ich, daß das Glied $\overline{p}^{\overline{\pi}}$ mir nur $+ 0$ gibt.

3. Ich wende auf ihn das zweyte Glied dieses zweyten Theiles an, und ich sage: das Glied, das ich finden soll, ist wiederum gleich $\overline{p}^{\overline{\pi}} \times (\overline{e} - 2)$ das heißt, dem Coefficienten, der diagonal ist dem vorher-

gehenden horizontaliter geraden Coefficienten, multiplicirt mit dem ersten horizontalen Exponenten weniger 2: ich sehe, daß das Glied, das ich finden soll, wirklich ein vorhergehendes horizontales Glied hat, das horizontaliter gerade ist; ich sehe ebenfalls, daß dieses ein diagonales hat, welches 1 ist, und ich schliesse daraus, daß das Glied, das ich finden soll, wiederum $= 1 \times (\bar{e} - 2)$ ist; weil aber der erste horizontale Exponent des zu suchenden Gliedes $= 1$ ist, so habe ich $1 \times (1 - 2)$ folglich 1×-1 , dessen Product mir -1 gibt.

Und weil es keine andere Glieder mehr in dem ungeraden Theile der Formel gibt, so habe ich nur $+ 0 - 1$, folglich -1 ; das ich mit N , zu der gehörigen Potenz erhoben, die, wie man schon gesehen hat, 0 seyn muß, multiplicire.

Folglich werde ich für das gesuchte Glied $-1 N^0$ haben, das ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

Und weil die Anzahl der Glieder der Formeln in dem Verhältnisse 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w. zunimmt, so schliesse ich daraus, daß das letzte Glied, das ich eben gefunden habe, auch das letzte der zweyten Formel ist.

Jetzt soll ich das 2te Glied der dritten Verticalreihe dieses Dreyeckes finden, welches auch das dritte Horizontalglied der dritten Formel ist.

Weil dieses Glied wiederum horizontaliter ungerade ist, so ist es auch der ungerade Theil, das heisst, der erste Theil der bildenden Formel, die allein auf ihn angewendet werden muß; daher sage ich:

Das Glied, das ich suchen soll ist gleich $\bar{p}^{\bar{\pi}}$; und weil der vorhergehende Vertical-Coefficient, der horizontaliter ungerade ist, $= -1$, so merke ich -1 auf, und schreite zum 2ten Gliede des ungeraden Theiles, indem ich sage:

Das Glied, das ich finden soll, ist noch gleich $+ \bar{d}^{\bar{\pi}} \times (\bar{e} - 2)$, und weil ich sehe, daß das Glied, welches ich suche, einen vorhergehenden horizontalen Coefficienten, der horizontaliter gerade ist,

hat, dessen Diagonal-Coefficient $= + 1$ ist, so werde ich haben $+ 1 \times (\bar{e} - 2)$, und weil der erste horizontale Exponent des gesuchten Gliedes $= 2$ ist, so werde ich haben $+ 1 \times (2 - 2)$, so werde ich haben $+ 1 \times 0 = 0$, was ich aufmerke.

3. Folglich werde ich im Ganzen $- 1 + 0 = - 1$ haben für den Coefficienten des zu suchenden Gliedes.

4. Ich multiplicire $- 1$ mit N zu der ersten Potenz erhoben, die gleich ist, wie sie seyn soll, der Anzahl der Glieder, weniger eins, die mit dem gesuchten in diesem Dreyecke vertical stehen.

5. Folglich werde ich für das gesuchte Glied haben $- 1 N^1$, das ich in seine Stelle in das Formular - Dreyeck setze, wie man hier sieht.

Ich soll nun das dritte Glied der dritten Verticalreihe dieses Dreyeckes finden, welches auch das dritte horizontale Glied der vierten Formel ist, und das sich folglich auch durch den ungeraden Theil der bildenden Formel findet.

Ich werde nun diesen Theil der Formel auf ihn anwenden, und ich sage:

1. Das Glied, das ich finden soll, ist gleich $\overset{vo\pi}{p}$, folglich $= - 1$, was ich aufmerke, und schreite zum 2ten Gliede des ungeraden Theiles, indem ich sage:

2. Das Glied, das ich finden soll, ist noch gleich $+ \overset{p\pi}{d} \times (\bar{e} - 2)$; und weil ich sehe, daß das gesuchte Glied einen vorhergehenden horizontalen Coefficienten hat, der horizontaliter gerade ist, und dessen Diagonal-Coefficient $= + 1$ ist, so werde ich $+ 1 \times (\bar{e} - 2)$ haben; und weil der erste horizontale Exponent des gesuchten Gliedes $= 3$ ist, so werde ich haben $+ 1 \times (3 - 2) = + 1 \times 1 = + 1$ was ich aufmerke.

3. Folglich werde ich im Ganzen haben $- 1 + 1 = - 0$; das ich um der Analogie und dem Mechanismus der Berechnung zu folgen, multiplicire mit N , zu der zweyten Potenz erhoben, die gleich ist, wie sie es seyn soll, der Anzahl der Glieder weniger 1, die in diesem Dreyecke mit dem gesuchten Gliede vertical stehen.

Folglich werde ich für dieses Glied $-0 N^2$ haben, das ich in seine Stelle in das Dreyeck setze, wie man hier sieht.

$$\begin{array}{l} 1 N^0 \\ 1 N^1 + 1 N^0 - 1 N^0 \\ 1 N^2 + 2 N^1 - 1 N^1 \\ 1 N^3 + 3 N^2 - 0 N^2 \end{array}$$

Ich soll nun das erste Glied der 4ten Verticalreihe dieses Dreyeckes finden, und weil dieses Glied horizontaliter gerade ist, so wird es der gerade Theil der bildenden Formel seyn, der allein auf ihn anwendbar seyn wird, daher sage ich:

1. Das Glied das ich finden soll ist gleich $+ \overset{\nu\pi}{p} = + 0$.

2. Das nähmliche Glied ist noch gleich $+ \overset{\nu\pi}{p} \Delta ({}^1\bar{e} - 1) = + 0$.

3. Es ist noch gleich $+ \overset{\bar{p}_0\bar{\pi}}{d} \times ({}^1\bar{e} - 1)$; und weil der vorhergehende Coefficient, der horizontaliter gerade ist, für Diagonal-Coefficient $+ 1$ hat, so werde ich haben $+ 1 \times ({}^1\bar{e} - 1)$; und weil der erste Exponent, der dem gesuchten Gliede horizontal ist, $= 2$, so werde ich haben $+ 1 \times (2 - 1) = + 1 \times 1 = + 1$, was ich aufmerke.

4. Das nähmliche Glied ist noch $= - \overset{\bar{p}_0\bar{\pi}}{d} \Delta ({}^1\bar{e} - 1)$, was mir $- 1 \Delta ({}^1\bar{e} - 1)$ gibt, folglich werde ich haben $- 1 \Delta (2 - 1) = - 1 \Delta 1 = - 1$, was ich aufmerke.

Folglich werde ich im Ganzen haben $+ 0 + 0 + 1 - 1 = + 0$, das ich mit N , zu der Potenz von $1 - 1$ erhoben, multiplicire; folglich werde ich haben $+ 0 N^0$, das ich mit B multiplicire, und ich werde $+ 0 N^0 B$ für das gesuchte Glied haben, das ich auf seine Stelle in das Dreyeck setze, wie man hier sieht.

Jetzt soll ich das zweyte Glied der nähmlichen vierten Verticalreihe suchen, und weil dieses Glied auch horizontaliter gerade ist, so wird der nähmliche gerade Theil der bildenden Formel auf ihn anwendbar seyn; daher sage ich:

$$\begin{array}{l} 1 N^0 \\ 1 N^1 + 1 N^0 B - 1 N^0 \\ 1 N^2 + 2 N^1 B - 1 N^1 + 0 N^0 B \\ 1 N^3 + 3 N^2 B - 0 N^2 \end{array}$$

1) Das Glied, das ich suchen soll, ist $= \overset{\nu\pi}{p}$, = dem vorhergehenden Vertical-Coefficienten, der horizontaliter gerade ist, $= 0$.

2) Das nämliche Glied ist noch $= + \frac{\overline{p}^{\overline{\pi}}}{p} \Delta (e-1) = 0$.

3) Das nämliche Glied ist noch $= + \frac{\overline{p}^{\overline{\pi}}}{d} \times (e-1)$, und weil der vorhergehende Coefficient, der horizontaliter ungerade ist, für Diagonal-Coefficienten $+ 2$ hat; so werde ich $+ 2 \times (e-1)$ haben, und weil der erste horizontale Exponent $= 3$ ist, so werde ich haben $+ 2 \times (3-1) = + 2 \times 2 = 4$, was ich aufmerke.

4) Das nämliche Glied ist noch $= - \frac{\overline{p}^{\overline{\pi}}}{d} \Delta (e-1)$ was mir gibt $- 2 \Delta (e-1)$; ich substituire für e seinen Werth 3, und ich werde haben $- 2 \Delta (3-1) = - 2 \Delta 2 = - 1$, was ich aufmerke.

5) Folglich werde ich im Ganzen haben $+ 0 + 0 + 4 - 1 = + 3$, was ich multiplicire mit N , zu der ersten Potenz erhoben, welche gleich ist, wie sie es seyn soll, der Anzahl der Glieder weniger eins, die mit dem gesuchten Gliede im Dreyecke vertical stehen.

Folglich werde ich haben $+ 3N^1$, das ich mit B multiplicire, und ich werde für das gesuchte Glied $+ 3N^1 B$ haben, das ich ins Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

Jetzt werde ich das erste Glied der fünften Verticalreihe des Dreyeckes suchen, welches die dritte Formel ergänzen wird.

$$\begin{array}{l} 1N^0 \\ 1N^1 + 1N^0 B - 1N^0 \\ 1N^2 + 2N^1 B - 1N^1 + 0N^0 B \\ 1N^3 + 3N^2 B - 0N^2 + 3N^1 B \end{array}$$

Weil dieses Glied horizontaliter ungerade ist, so wird es auch der ungerade Theil der bildenden Formel seyn, die allein ihn bestimmen wird; folglich sage ich:

1) das Glied, das ich finden soll, ist $= \frac{\overline{p}^{\overline{\pi}}}{p} = 0$.

2) Das nämliche Glied ist noch $= + \frac{\overline{p}^{\overline{\pi}}}{d} \times (e-2)$, und weil der vorhergehende Coefficient, der horizontaliter gerade ist, für Diagonal-Coefficient $- 1$ hat, so werde ich haben $- 1 \times (e-2)$; und weil der erste Exponent, der dem gesuchten Gliede horizontal ist, $= 2$, so werde ich haben $- 1 \times (2-2) = - 1 \times 0 = - 0$.

3) Folglich werde ich im Ganzen $- 0$ haben, was ich mit N , zu der gehörigen Potenz erhoben, die, wie man schon gesehen hat, 0 seyn muß, multiplicire.

4) Folglich werde ich für das gesuchte Glied $-oN^o$ haben, das ich in das Dreyeck setze, wie man hier sieht.

Jetzt muß ich das zweyte Glied der nähmlichen fünften Verticalreihe haben, die, da sie auch horizontaliter ungerade ist, sich auch durch den bloßen ungeraden Theil der bildenden Formel bestimmen wird; ich sage daher:

- 1) Das Glied, das ich haben muß, ist $\frac{p}{p^{\pi}} = -o$.
- 2) Das nähmliche Glied ist noch $= + \frac{p}{p^{\pi}} \times (e-2)$; und weil der vorhergehende horizontale Coefficient horizontaliter gerade ist, und er einen Diagonal-Coefficienten $= -1$ hat, so werde ich haben $-1 \times (e-2)$; und weil der erste horizontale Exponent hier $= 3$ ist, so werde ich haben: $-1 \times (3-2) = -1 \times 1 = -1$, das ich aufmerke.

Folglich habe ich im Ganzen $-o-1 = -1$, das ich mit N zu der, der verticalen Stellung weniger 1 des gesuchten Gliedes analogen Potenz erhoben, multiplicire.

Daher ist dieß Glied $= -1 N^1$, das ich in das Dreyeck setze, wie man hier sieht.

Es wäre unnöthig, die zwey übrigen Glieder der vierten Formel zu suchen, weil man beym ersten Ueberblicke sieht, daß die respectiven Theile der bildenden Formel, die sie bestimmen, nur Nullen geben; so, daß diese zwey Glieder $+oN^o B$ und $-oN^o$ seyn werden, die ich so ins Dreyeck setzen werde; wovon folgende Skizze die vier ersten Formeln angeben wird, die, mit ihren Divisoren versehen, alle Glieder bestimmen werden der vier Diagonalreihen aller additionellen Dreyecke mit zwey Elementaren, deren erste Elementare die Einheit seyn wird.

$$\begin{array}{l}
 1N^o \quad \Delta \left(\overset{CPOS. C.NEG.}{S} - \bar{S} \right) \\
 1N^1 + 1N^o B - 1N^o \quad \Delta \text{ wie oben.} \\
 1N^2 + 2N^1 B - 1N^1 + oN^o B - oN^o \quad \Delta \text{ wie oben.} \\
 1N^3 + 3N^2 B - oN^2 + 3N^1 B - 1N^1 + oN^o B - oN^o \quad \Delta \text{ wie oben.}
 \end{array}$$

Und so wird es leicht seyn, dieses Dreyeck so weit fortzusetzen, als man will.

Anwendung des allgemeinen Formular-Dreyeckes auf alle additionellen Dreyecke in das Unendliche, die zwey Elementaren, deren erste die Einheit ist, haben.

Weil jede Formel dieses Dreyeckes nur in den additionellen Dreyecken eine solche Diagonalreihe bestimmt, dessen Wievielheit (Quotität) gleich ist der Wievielheit der Formel.

So folgt daraus, daß diese Wievielheit, so wie die diagonale Anzahl der Glieder, und die Basis mit sammt der Formel, die wichtigsten Werkzeuge bey der Bestimmung eines beliebigen Gliedes in jedem additionellen Dreyecke seyn müssen.

Folglich, bevor ich zu dieser Bestimmung schreite, ist es wesentlich, um falsche Resultate zu vermeiden, ein vorläufiges Verzeichniß von der Wievielheit der Formel, der diagonalen Anzahl der Glieder, und der Basis zu nehmen; Basis, welche zu gleicher Zeit die Wievielheit des additionellen Dreyeckes, dessen Glied man sucht, angeben wird.

Folglich, wenn man verlangte zu bestimmen, in dem 2ten additionellen Dreyecke das 2te Glied der 4ten Diagonalreihe, welches = 7 ist, Glied, so durch die 4te Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes bestimmt werden muß, welche Formel folgende ist.

$$\text{Glied} = (1N^3 + 3N^2B + 0N^2 + 3N^1B - 1N^1) \div 6,$$

so würde ich dieses vorläufige Verzeichniß nehmen

$$N=2. \quad B=2. \quad 4\text{te Formel};$$

hernach werde ich verfahrenwie folget:

$$\begin{array}{rcl} +1 N^3 & = & 8 \\ +3 N^2 B & = & 24 \\ +3 N^1 B & = & 12 \\ \hline & & 44 \\ -1 N^1 & = & -2 \\ \hline & & 42 \end{array} \quad \div \frac{6}{7}$$

und der Quotient der Division gibt mir 7 für das gesuchte G lied.

Es sey im nähmlichen additionellen Dreyecke das 3te Glied der 4ten Diagonalreihe zu prüfen.

$N=3.$ $B=2.$ 4te Formel.

$$\begin{array}{rcl} +1 N^3 & = & 27 \\ +3 N^2 B & = & 54 \\ +3 N^1 B & = & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 N^1 & = & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ \hline 96 \Delta \quad | \quad 6 \\ 36 \\ \hline 00 \end{array}$$

16 Glied das ich prüfen sollte.

Es sey im nähmlichen 2ten additionellen Dreyecke das 5te Glied der 4ten Diagonalreihe zu finden.

$N=5.$ $B=2.$ 4te Formel.

$$\begin{array}{rcl} +1 N^5 & = & 125 \\ +3 N^4 B & = & 150 \\ +3 N^3 B & = & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 N^1 & = & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \Delta \quad | \quad 6 \\ 50 \end{array}$$

50 Glied, das ich prüfen sollte.

Es sey im 3ten additionellen Dreyecke das 5te Glied der 4ten Diagonalreihe zu prüfen.

$N=5.$ $B=3.$ 4te Formel.

$$\begin{array}{rcl} +1 N^5 & = & 125 \\ +3 N^4 B & = & 225 \\ +3 N^3 B & = & 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 N^1 & = & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 390 \Delta \quad | \quad 6 \\ 30 \end{array}$$

65 Glied, das ich prüfen sollte.

Es sey im 4ten additionellen Dreyecke das 5te Glied der 4ten Diagonalreihe zu prüfen.

$N=5. \quad B=4. \quad 4te \text{ Formel}$

$$\begin{array}{rcl} +1 \ N^5 & = & 125 \\ +3 \ N^2 \ B & = & 300 \\ +3 \ N^1 \ B & = & 60 \\ \hline & & 485 \\ -1 \ N^4 & = & -5 \\ \hline & & 480 \end{array}$$

$$\Delta \mid 6$$

80 Glied das ich prüfen sollte.

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 25 zu bilden, das 6te Glied der 4ten Diagonalreihe verlangte zu kennen, würde ich verfahren, wie folget:

$N=6. \quad B=25. \quad 4te \text{ Formel.}$

$$\begin{array}{rcl} +1 \ N^5 & = & 216 \\ +3 \ N^2 \ B & = & 2700 \\ +3 \ N^1 \ B & = & 450 \\ \hline & & 3366 \\ -1 \ N^4 & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3360 \\ 36 \end{array} \Delta \mid 6$$

560=dem gesuchten Gliede.

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 121 zu bilden, das 7te Glied von der 4ten Diagonalreihe verlangte zu kennen, würde ich folgender Weise verfahren:

$N=7. \quad B=121. \quad 4te \text{ Formel.}$

$$\begin{array}{rcl} +1 \ N^5 & = & 343 \\ +3 \ N^2 \ B & = & 17787 \\ +3 \ N^1 \ B & = & 2541 \\ \hline & & 20671 \\ -1 \ N^4 & = & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20664 \\ 7 \end{array} \Delta \mid 6$$

3444=dem gesuchten Gliede.

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 1768 zu bilden, das 9te Glied von der 4ten Diagonalreihe verlangte zu kennen.

$N=9.$ $B=1768.$ 4te Formel.

$$\begin{array}{rcl}
 +1 N^3 & = & 729 \\
 +3 N^2 B & = & 429624 \\
 +3 N^1 B & = & 47736 \\
 \hline
 & & 478089 \\
 -1 N^0 & = & -9 \\
 \hline
 & & 478080 \quad \Delta \quad | 6 \\
 & & 58 \qquad \qquad \qquad 79680 = \text{dem gesuchten Gliede.} \\
 & & 40 \\
 & & 48 \\
 & & 00
 \end{array}$$

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 1772 zu bilden, das 6te Glied der 6ten Diagonalreihe zu kennen verlangte.

$N=6.$ $B=1772.$ 6te Formel.

$$\begin{array}{rcl}
 +1 N^5 & = & 7776 \\
 +5 N^4 B & = & 11482560 \\
 +5 N^3 B^2 & = & 6480 \\
 +30 N^2 B^3 & = & 11482560 \\
 +5 N^1 B^4 & = & 1080 \\
 +55 N^0 B^5 & = & 3508560 \\
 \hline
 & & 26489016 \\
 -5 N^2 & = & -180 \\
 \hline
 & & 26488836 \\
 +30 N^1 B & = & 318960 \\
 \hline
 & & 26807796 \\
 -6 N^0 & = & -36 \\
 \hline
 & & 26807760 \quad \Delta \quad | 120 \\
 & & 280 \qquad \qquad \qquad 223398 = \text{dem gesuchten Gliede.} \\
 & & 407 \\
 & & 477 \\
 & & 1176 \\
 & & 960 \\
 & & 000
 \end{array}$$

Wenn man in einem additionellen Dreyecke auf eine Basis von 1793 zu bilden, das 19te Glied der 5ten Diagonalreihe verlangte zu kennen, würde ich auf diese Art verfahren.

$N=19. \quad B=1793. \quad 5te \text{ Formel.}$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \ N^4 & = & 130321 \\
 4 \ N^3 \ B & = & 49192748 \\
 2 \ N^3 & = & 13718 \\
 12 \ N^2 \ B & = & 7767276 \\
 & & 57104063 \\
 - 1 \ N^2 & = & . \quad - 361 \\
 & & 57103702 \\
 8 \ N^1 \ B & = & . \quad 272536 \\
 & & 57376238 \\
 - 2 \ N^1 & = & . \quad - 38 \\
 & & 57376200
 \end{array}$$

$\Delta \mid 24 \quad 2390675 = \text{dem gesuchten Gliede.}$

$\begin{array}{r} 217 \\ 162 \\ 180 \\ 120 \\ 00 \end{array}$

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 1771 zu bilden, das 5te Glied der 6ten Diagonalreihe verlangte zu kennen.

$N=5. \quad B=1771. \quad 6te \text{ Formel.}$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \ N^5 & = & . \quad . \quad . \quad 3125 \\
 5 \ N^4 \ B & = & . \quad . \quad 5534375 \\
 5 \ N^4 & = & . \quad . \quad . \quad 3125 \\
 30 \ N^3 \ B & = & . \quad . \quad 6641250 \\
 5 \ N^3 & = & . \quad . \quad . \quad 625 \\
 55 \ N^2 \ B & = & . \quad . \quad 2435125 \\
 & & 14617625 \\
 - 5 \ N^2 & = & . \quad . \quad - 125 \\
 & & 14617500 \\
 30 \ N^1 \ B & = & . \quad . \quad 265650 \\
 & & 14883150 \\
 - 6 \ N^1 & = & . \quad . \quad - 30 \\
 & & 14883120
 \end{array}$$

$\Delta \mid 120 \quad 124026 = \text{dem gesuchten Gliede.}$

$\begin{array}{r} 288 \\ 483 \\ 312 \\ 720 \\ 000 \end{array}$

Wenn man in einem additionellen Dreyecke, auf eine Basis von 1738 zu bilden, das 11te Glied der 6ten Diagonalreihe verlangte zu kennen.

$N=11.$ $B=1738.$ 6te Formel.

$$\begin{array}{rcl}
 1 \ N^5 & = & 161051 \\
 5 \ N^4 \ B & = & 127230290 \\
 5 \ N^4 & = & 73205 \\
 30 \ N^3 \ B & = & 69398340 \\
 5 \ N^3 & = & 6655 \\
 55 \ N^2 \ B & = & 11566390 \\
 & & \underline{208435931} \\
 - 5 \ N^2 & = & \quad \quad - 605 \\
 & & \underline{208435326} \\
 30 \ N^1 \ B & = & \quad \quad 573540 \\
 & & \underline{209008866} \\
 - 6 \ N^1 & = & \quad \quad \quad - 66 \\
 & & \underline{209008800} \quad \Delta \quad | \quad 120 \\
 & & 890 \quad \quad \quad 1741740 = \text{dem gesuchten Gliede.} \\
 & & 500 \\
 & & 208 \\
 & & 888 \\
 & & 480 \\
 & & 000
 \end{array}$$

Es scheint mir unnöthig zu seyn fortzufahren: denn nach dem, was man gesehen hat, glaube ich, daß die Analogie der Berechnung sich dergestalt fest gesetzt hat, daß man an dem Gelingen jedes Resultates nicht zweifeln könne, so man auf was immer für ein additionelles Dreyeck und Formel versuchen wollte.

Dennoch kann ich nicht unterlassen zu bemerken, wie sehr der Einfluß des Elementes in diesen beyden Formular-Dreyecken sich ausdrückt.

Wenn man das erste dieser Dreyecke mit dem letzten vergleicht, würde man gar nicht vermuthen, daß sie gleich seyn könnten, so sehr ist der Einfluß des Elementes verborgen, und fast unmerkbar in dem ersten, weil, da die Basis des ersten additionellen Dreyeckes das Element ist, sein Einfluß keine Spur in den Resultaten hinterlassen könnte, nicht mehr als der Einfluß des Elementes in dem ersten Ele-

mentar-Dreyecke in den Resultaten, deren Zusammenhang seine Bildung geordnet hat, Spuren hinterlassen könnte.

Diese zwey Formular-Dreyecke sind dennoch ähnlich, um nicht zu sagen die nähnlichen; und zum Beweise des Gesagten werde ich bloß die sechste Formel dieser zwey Dreyecke vergleichen.

Die sechste Formel des ersten Formular-Dreyeckes ist, wie folget:

$$\text{Glied} = (1N^5 + 10N^4 + 35N^3 + 50N^2 + 24N^1) \cdot \Delta \cdot 120.$$

Mit Genauheit den Einfluß des Elementes auf diese Formel angeben, heißt, daraus die sechste Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes bilden.

Man hat in der sechsten Formel dieses letzten Dreyeckes, so wie in allen übrigen, gesehen, daß die Basis nur die geraden Glieder der Formel afficirt, und auf ihnen Einfluß hat; man hat gesehen, daß sie neun Glieder, und die Formel des ersten Formular-Dreyeckes nur fünf Glieder hat.

Aus diesen fünf Gliedern hat die Berechnung neun gemacht, indem sie die vier letzten bald in gleiche, bald in ungleiche Theile geordnet hat, nach dem Einflusse, so das Element auf diese vier letzten Glieder hat; da sie dem Elemente (als Basis) jeden Einfluß auf das erste Glied versagt hat, so wie auf alle erste Glieder aller übrigen Formeln des ersten Formular-Dreyeckes.

Ich werde trachten diese Ordnung der Berechnung, so wie auch den Einfluß des Elementes auf jedes Glied zu bestimmen, und werde *in margine* die Resultate setzen, deren Zusammenhang die sechste Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes bilden soll.

Das erste Glied der sechsten Formel des ersten Formular-Dreyeckes ist $1N^5$

Man hat schon gesehen, daß die Berechnung dem Elemente jeden Einfluß auf dieses erste Glied versagt hat; und es so, wie es ist, in die sechste Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes gestellt hat; folglich hier $1N^5$

Das zweyte Glied der sechsten Formel des ersten Formular-Dreyeckes ist $+10N^4$

Weil es nur die Hälfte dieses Gliedes ist, worauf das Element Einfluß hat, die, wie man gesehen hat, die Basis des ersten additionellen Dreyeckes ist, so hat die Berech-

nung dieses Glied in zwey gleiche Theile geordnet, deren einer durch die Basis dieses additionellen Dreyeckes afficirt worden ist, und der andere nicht: so daß die sechste Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes zwey Glieder statt eines hat empfangen können; nämlich für die eine Hälfte $+5N^2B$
und für die andere $+5N^2$

Welche zusammen das Glied $+10N^2$ des ersten Formular-Dreyeckes ausmachen, weil das Element die Basis desselben ist.

Das dritte Glied der nämlichen Formel ist $+35N^3$.

Weil dieses Glied ebenfalls nicht gänzlich durch die Basis afficirt ist, so hat die Berechnung es auch in zwey, aber ungleiche Theile, geordnet; nämlich in $\frac{6}{7}$ und $\frac{1}{7}$, deren erster Theil durch die Basis afficirt ist, und der zweyte nicht, so daß diese Theilung diese zwey Glieder $+30N^3B$ und $+5N^3$ hervor bringt; welche die Berechnung dergestalt in das allgemeine Formular-Dreyeck übersetzt hat, nämlich für die $\frac{6}{7}$ $+30N^3B$
und für das übrige $\frac{1}{7}$ $+5N^3$

Deren Summe immer gleich bleibt dem dritten oben genannten Gliede $+35N^3$ des ersten Formular-Dreyeckes, dessen Basis das Element ist.

Das vierte Glied der nämlichen Formel ist $+50N^4$.

Weil dieses Glied zu klein ist, um von der Basis afficirt zu werden, und es dennoch nicht vermehrt werden kann, ohne eine gänzliche Verwirrung, so hat die Berechnung diesen, dem Anscheine nach sich widersprechenden, Hindernissen dadurch abgeholfen, daß sie es für einen Augenblick um $\frac{1}{10}$ vermehrt hat, und sie es daher auf $+55N^4$ gebracht hat; und mit der Basis afficirt, ist es $+55N^4B$ geworden.

Weil es aber auf diese Art das Glied $+50N^4$ nicht ausglich, welches es nicht überschreiten darf, so hat die Berechnung, um diess abzuhefen, ihm ein negatives Glied vom nämlichen Werthe seines Ueberschusses beygefügt,

nämlich $-5N^2$, so daß diese zwey Glieder gleich $+50 N^2$ des ersten Formular-Dreyeckes geworden sind.

Und es ist durch diese Veränderung, die für dieses letzte Dreyeck gleichgültig ist, weil das Element seine Basis ist, daß das allgemeine Formular-Dreyeck hat empfangen können das positive Glied von $+55N^2 B$ und das negative Glied von $-5N^2$

In Betreff des 5ten Gliedes, welches $+24 N^2$ ist;

Weil dieses Glied auch um den 4ten Theil zu klein ist, so hat die Berechnung dieß auf die nämliche Weise abgeholfen, indem sie es auf einen Augenblick bis $+30N^2$ vermehrt, und mit der Basis afficirt hat, so, daß es dadurch $+30N^2 B$ geworden ist, dann hat sie zugleich ein negatives Glied beygefügt, (wodurch die Vermehrung wieder abgetragen) nämlich das Glied $-6N^2$, welches von der Basis nicht afficirt ist.

Und auf diese Weise hat die 6te Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes empfangen können ein positives Glied von $+30 N^2 B$ und ein negatives Glied von $-6 N^2$ deren Summe $= +24 N^2$ des ersten Formular-Dreyeckes ist.

Man sieht daher, und die Analogie der Berechnung bürgt dafür, daß die 6te Formel des ersten Formular-Dreyeckes nur eine Reduction der 6ten Formel des allgemeinen Formular-Dreyeckes ist.

Reduction, die ohne Folgen für das erste Formular-Dreyeck hat geschehen können, weil das Element die Basis ist des ersten additionellen Dreyeckes, welches es bestimmen soll.

Man sieht ebenfalls, wie groß hier der Einfluß des Elementes, und wie sehr er verborgen ist; besonders, wenn man in dieser letzten Formel statt B den Werth der Basis des ersten additionellen Dreyeckes, das heißt das Element, substituirt; weil man alsdann diese Reduction in einem Ueberblicke sieht.

Die nämliche oder wenigstens eine ähnliche Reduction geschieht leicht von allen anderen Formeln des allgemeinen Formular-Dreyeckes zu den correspondirenden Formeln des ersten Formular-Dreyeckes.

Allein von den Formeln des ersten Formular-Dreieckes ausgehen, und, um so zu sagen, die correspondirenden Formeln des allgemeinen Formular-Dreieckes ohne die Hülfe dieses letzten zu integriren, geschieht nicht ohne Schwierigkeit; weil man kein scheinbares Verhältniß zwischen der Integration der einen Formel und der andern des nämlichen ersten Formular-Dreieckes wahrnimmt; und man wird von der Schwierigkeit es zu begreifen, überzeugt seyn, wenn man betrachtet, daß aus dieser Ursache die Berechnung die verwickelte bildende Formel des allgemeinen Formular-Dreieckes hat verfertigen müssen.

Dieses Verhältniß existirt dennoch mit einem regelmässigen Gange, der sonderbar genug ist, um den Liebhabern dargestellt zu werden.

Da ich aber diesen Theil endigen will, um mich mit dem wichtigeren geometrischen Theile zu beschäftigen, so werde ich davon nur eine Uebersicht geben, die ich mit mehr Mulse, nach Mafse der Aufmerksamkeit, so es verdienen würde, erweitern könnte.

Diese Uebersicht wird zu gleicher Zeit von derjenigen über die *besonderen Formular-Dreiecke*, welche die correspondirenden additionellen Dreiecke besonders bestimmen, begleitet seyn.

Von den besonderen Formular-Dreiecken, welche die correspondirenden additionellen Dreiecke bestimmen.

Ich habe mir eine unnöthige Mühe gegeben, um das besondere Formular-Dreieck zu finden, welches, nach der Analogie, die Berechnung den übrigen additionellen Dreiecke schien gegeben zu haben, auf die nämliche Weise, als sie eines dem ersten additionellen Dreiecke gegeben hat.

Allein seit ich wahrgenommen habe, daß die Formeln des ersten Formular-Dreieckes nur Reductionen der correspondirenden Formeln des allgemeinen Formular-Dreieckes waren, so habe ich mich überzeugt, daß die Analogie einen anderen Gang, verschieden von demjenigen, den ich ihr zumuthete, genommen hatte; dennoch regelmässig und analogisch demjenigen, so sie genommen hat, um das besondere Formular-Dreieck, welches das erste additionelle Dreieck be-

stimmt, zu bilden; welchen analogen Gang ich bisher mißkannt hatte, und der schwer zu begreifen war.

Die Berechnung hat diese besonderen Formular-Dreyecke gebildet, mit Hülfe *der Ergänzungen*, die sie auf zwey sonderbare Arten bestimmt hat, nämlich durch ein *Elementar-Dreyeck* der *Ergänzungen*, und durch ein *Ergänzungs-Dreyeck*.

Ich werde eine Skizze jedes dieser Dreyecke geben, und erstens:

Von dem Elementar-Dreyecke der Ergänzungen.

Bisher sind die Elemente verschiedener Weise erschienen; man hatte sie aber noch nicht in der umgekehrten Diagonalstellung in derjenigen von 0_1 gesehen.

Es wird in dieser Stellung seyn, daß die Elemente die Basis des Elementar-Dreyeckes, wovon es sich handelt, bilden werden; Dreyeck, das sie mit der bloßen Hülfe einer Formel hervor bringen werden.

Dreyeck der Elementaren der Ergänzungen.

$$\text{Glieder} = p \bar{n} + d(2 \overset{\circ}{n} + \bar{n} - 6).$$

0

o. I.

o. 2. — 1.

o. 4. — 1.

o. 8. 9. — 2.

o. 16. 67. 28. — 6.

o. 32. 313. 514. 110. — 24.

o. 64. 1227. 4560. 4148. 516. — 120.

o. 128. 4385. 30510. 61780. 36280. 2772. — 720.

o. 256. 14819. 174660. 646510. 835480. 345924. 16416. — 5040.

o.

Es ist zu bemerken: 1. Die Summe der Horizontalreihen dieses Dreyeckes ist, nach der Art des Elementar-Dreyeckes der Coefficienten, ebenfalls gleich der Reihe I, 1, 3, 15, 105, 945, 10395 u. s. w.
2. Diese nämlich Horizontalreihen, von der Rechten nach der Linken anzufangen, geben die Elementaren der Ergänzungen, deren

ich eben erwähnt; wenn sie vertical gestellt sind, und man daraus Dreyecke bildet, die man *Dreyecke der Ergänzungen* nennen könnte, so werden diese Ergänzungen aus jedem Dreyecke bey der nähmlichen Verticalreihe entspringen, als die Coefficienten aus ihren Dreyecken entsprungen sind, wie man es in folgenden vier Skizzen sieht.

| 1te Ergän-
zungen. | 2te Ergän-
zungen. | 3te Ergän-
zungen. | 4te Ergän-
zungen. |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| O. . | I. . | —1. . | —1. . |
| o. o | o. 1 | 2.—1. | 4.—1. |
| o. o | o. 1 | o. 1.—1. | o. 3.—1. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 0.—1. | o. 3. 2.—1. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 1.—1. | o. 3. 5. 1.—1. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 2. 0. | o. 3. 8. 6. 0.—1. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 3. 2. | o. 3. 11. 14. 6. 1. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 4. 5. | o. 3. 14. 25. 20. 5. |
| o. o | o. 1 | o. 1. 5. 9. | o. 3. 17. 39. 45. 25. |

Man kann folglich, wie man es oben mit den Coefficienten gemacht hat, diese *Ergänzungen* vereinigen, und daraus ein Dreyeck bilden, welche sie alsdann auf die nähmliche Weise darstellen würde, als die Berechnung sie bey der Bildung der besonderen Formular-Dreyecke anwendet.

Weil man aber alsdann eben so langweilige Additionen, als diejenigen der Coefficienten, antreffen würde; so hat die Berechnung diesem abgeholfen durch die Bildung eines allgemeinen Ergänzungs-Dreyeckes, welches wiederum die Elemente als Basis, diagonal umgekehrt, wie in dem letzten Elementar-Dreyecke bilden: und es ist von diesem Ergänzungs-Dreyecke, das ich eine Skizze geben werde, bevor ich auf die besonderen Formular-Dreyecke komme.

Ergänzungs-Dreyeck, um den Coefficienten der besonderen Formular-Dreyecke zu Stande zu bringen.

Man hat schon gesehen, daß es die Elemente o_1 in der diagonalen Stellung seyn, so die Basis dieses Dreyeckes ausmachen: aus die-

$(\overset{\nu}{n} + \bar{n} - 5)$, wird dieses entspringen: wie man in dieser Skizze sieht.

$$\text{Glieder} = p + d(n + \bar{n} - 5)$$

O.
 o. 1.
 o. 1.—1.
 o. 1.—1. o.
 o. 1. o.—1. o.
 o. 1. 2.—1. —2. o.
 o. 1. 5. 5. —5. —6. o.
 o. 1. 9. 25. 15. —26.—24. o.
 o. 1. 14. 70. 140. 49.—154.—120. o.
 o. 1. 20. 154. 560. 889. 140.—1044.—720. o.
 o. 1. 27. 294. 1638. 4809. 6363.—64.—8028.—5040. o.
 o. 1. 35. 510. 3990. 17913. 44835. 50840.—8540.—69264.—40320. o.

Ein einziges Beyspiel wird hinlänglich seyn, um einen Begriff von der Verfertigung dieses Dreyeckes zu geben.

Es sey das Glied -64 zu prüfen oder zu bestimmen: ich sage, indem ich die Formel anwende: dieses Glied ist $= p = -1044$, was ich aufmerke.

Dieses Glied ist noch $= +d(\overset{\vee}{n} + \bar{n} - 5) = 140 \times (4 + 8 - 5) = 140 \times 7 = 980$, was ich aufmerke.

Folglich habe ich im Ganzen $-1044 + 980 = -64$ für das zu bestimmende Glied.

Ich war verwundert zu sehen, daß dieses Dreyeck die horizontalen ungeraden Coefficienten des allgemeinen Formular-Dreyeckes gab, und in der nämlichen Ordnung als sie darin gestellt sind; weil es schon fast zwey Monathe war, nachdem ich das allgemeine Formular-Dreyeck gefunden hatte, daß ich dieses Formular-Dreyeck haben finden können; nachdem ich die Hülfquellen, die ich von der Berechnung empfangen konnte, erschöpft hatte.

Obschon ich das *Differential-Dreieck*, welches die geraden Coefficienten des allgemeinen Formular-Dreieckes angibt, gefunden hatte.

Ich nenne es *Differential-Dreyeck*, weil es die Differenzen angibt, so sich zwischen dem ersten Formular-Dreyecke und den anderen Formular-Dreyecken befinden: diese Differenzen multiplicirt mit der zweyten Elementare des Formular-Dreyeckes, welches man daraus mit Hülfe des ersten Formular-Dreyeckes bilden wollte.

Und weil dieses Dreyeck ziemlich sonderbar ist, so werde ich auch davon hier eine Skizze geben, bevor ich auf die *besonderen Formular-Dreyecke* komme.

Differential-Dreyeck.

Dieses Dreyeck bildet sich ebenfalls durch die Elemente als Basis, diagonal gestellt * 1, auf und folgende Formel angewendet:

$$\text{Glieder} = p + p \Delta (n + \bar{n} - 3) + d(n + \bar{n} - 3) - d \Delta (n + \bar{n} - 3)$$

O.

o. I.

o. 2. o.

o. 3. 3. o.

o. 4. 12. 8. o.

o. 5. 30. 55. 30. o.

o. 6. 60. 210. 300. 144. o.

o. 7. 105. 595. 1575. 1918. 840. o.

o. 8. 168. 1400. 5880. 12992. 14112. 5760. o.

o. 9. 252. 2898. 17640. 60921. 118188. 117612. 45360. o.

o. 10. 360. 5460. 45360. 224490. 672840. 1181240. 1095840. 403200. o.

Ein Beyspiel wird hinlänglich seyn, um den Mechanismus dieser Verfertigung zu begreifen.

Wenn man das Glied 300 dieses Dreyeckes bestimmen oder prüfen wollte, so würde man es folgender Weise thun:

$$\begin{array}{rcl} p. \text{ das vorhergehende Verticalglied} & = & 30 \\ + p \Delta (n + \bar{n} - 3) & = & 30 \Delta (8 - 3) = 30 \Delta 5 = 6 \\ + d (n + \bar{n} - 3) & = & 55 \times (8 - 3) = 55 \times 5 = 275 \\ - d \Delta (n + \bar{n} - 3) & = & -55 \Delta (8 - 3) = -55 \Delta 5 = -11 \\ & & \hline & & 300 \end{array}$$

Wollte man das vorletzte Glied der letzten Horizontalreihe, 1095840, prüfen, so würde man es thun, wie folget: dießs Glied ist

$$\begin{array}{r}
 = p = \dots \dots \dots 45360 \\
 + p \Delta (n+n-3) = 45360 \Delta (12-3) \dots \dots \dots 5040 \\
 + d (n+n-3) = 117612 \times (12-3) = \dots \dots \dots 1058508 \\
 \hline
 \dots \dots \dots 1108908 \\
 - d \Delta (n+n-3) = -117612 \Delta (12-3) = \dots \dots \dots -13068 \\
 \hline
 \dots \dots \dots 1095840
 \end{array}$$

Allgemeine Formel für alle besondere Formular-Dreyecke in's Unendliche.

Es ist bemerkenswerth, daßs die Berechnung sich scheint geweigert zu haben, diese allgemeine Formel ohne fremde Hülfe hervor zu bringen: wenigstens sind meine Nachsuchungen, um sie zu finden, fruchtlos gewesen; und ich werde mich mit dieser fremden Hülfe, genommen aus dem oben geschriebenen Ergänzungs-Dreyecke, begnügen müssen.

Hier ist diese Formel:

Glied ist $= \left((p+d (n+n-3) + \binom{a}{b-1} c_t' \Delta C) \binom{a}{N} \binom{a}{n-1} \Delta F \right) \Delta \left(S \Delta \binom{a}{b} \right)$
 deren grammaticalischer Ausdruck folgender ist:

Jedes Glied eines besonderen Formular-Dreyeckes, das mit einem additionellen Dreyecke von gleicher Basis correspondirt, ist = dem vorhergehenden Coefficienten, der dem gesuchten Gliede vertical ist.

Mehr dem Coefficienten, der dem gesuchten Gliede diagonal ist, multiplicirt mit der Anzahl der verticalen und horizontalen Glieder weniger drey des gesuchten Gliedes.

Mehr der Basis weniger eins des correspondirenden additionellen Dreyeckes, multiplicirt mit dem Gliede des Ergänzungs-Dreyeckes, das mit dem gesuchten Gliede correspondirt.

Das Ganze multiplicirt mit N , Anzeigungsbuchstabe der Diagonal-Anzahl der Glieder des correspondirenden additionellen Dreyeckes;

dieser Anzeiger, zu einer Potenz erhoben, die gleich ist der Anzahl der Glieder weniger eins, die mit dem gesuchten Gliede vertical stehen.

Das Ganze dividirt durch die Summe der Coefficienten der ganzen horizontalen Reihe; diese Summe vorher dividirt mit der afficirenden Basis des correspondirenden additionellen Dreyeckes.

Ich sage *afficirende Basis*, um diese letzte Division zu mässigen, in Beziehung auf die erste Horizontalreihe des Formular-Dreyeckes, die nur aus dem Elemente bestehet, und nur mit der ersten Elementare der Basis des additionellen Dreyeckes, welche Elementare auch das Element ist, afficirt wird.

Denn es ist das erste Element, das, auf die Formel angewendet, alle besondere Formular-Dreyecke bildet, welche auch die Basis der correspondirenden additionellen Dreyecke seyn mag.

Wenn man zum Beyspiele verlangte das zweyte Formular-Dreyeck zu bilden, um die Glieder des zweyten additionellen Dreyeckes zu bestimmen, so würde man nur das erste Element gebrauchen, man würde es als Coefficient ansehen, ihm die Formel anwenden, und das zweyte Formular-Dreyeck würde gebildet werden.

Ich werde diesen Mechanismus der Berechnung in den vier ersten Formeln dieses zweyten Dreyeckes prüfen.

1) Ich stelle das erste Element, wie hier neben und indem ich das Glied, das ihm vertical folgen soll, suche, sage ich, da ich die Formel anwende:

Dieses Glied $= p = 1$, was ich aufmerke.

Dieses Glied ist noch $= + d (n + \bar{n} - 3)$, und ich sehe, das das Glied, so ich suche, kein Diagonalglied hat; folglich gibt mir dieses Glied nur 0, was ich aufmerke.

Dieses Glied ist noch $= + \binom{a}{b-1} t$, und weil die Basis weniger 1 des zweyten additionellen Dreyeckes 1 ist, so werde ich 1 zu multipliciren haben mit dem Gliede des Ergänzungs-Dreyeckes, welches mit dem gesuchten Gliede correspondirt; und weil dieses correspondirende Glied 0 ist, so werde ich 1 mit 0 zu multipliciren haben, folglich werde ich 0 haben, was ich aufmerke.

Also werde ich im Ganzen haben $+ 1 + 0 + 0 = 1$, das ich multi-

plicire mit N , zu der Potenz erhoben, die gleich ist der Anzahl der Glieder weniger 1, die mit dem gesuchten Gliede vertical stehen.

Folglich werde ich ${}_1N^1$ für das gesuchte Glied haben, welches ich hier in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

Und weil ich sehe, daß wegen des Mangels des ${}_1N^1$ Diagonals, die übrigen Glieder, die vertical abwärts laufen, alle gleich seyn werden, nur mit dem Unterschiede, daß die Potenz von N sich nach und nach um die Einheit vermehren wird, so erspare ich mir die Mühe sie zu suchen, und ich stelle sie in das Dreyeck wie man hier sieht.

Da die erste Verticalreihe gebildet ist, so schreite ich zum ersten Gliede der zweyten, und ich sage:

Dieses Glied ist $= {}^p_p = 0$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= + d({}^p_{n+\bar{n}} - 3)$, und weil der Diagonal-Coefficient hier gleich 1 ist, so werde ich haben $1 \times ({}^p_{n+\bar{n}} - 3) = 1 \times (1 + 2 - 3) = 1 \times 0 = 0$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= + \left(\frac{\triangle a}{b} - 1 \right) {}^C \triangle C$, und weil die Basis des zweyten additionellen Dreyeckes 2 ist, und das Glied des Ergänzungs-Dreyeckes, welches dem gesuchten correspondirt, $= 1$ ist, so werde ich haben $1 \times 1 = 1$.

Also werde ich im Ganzen haben $+0+0+1=+1$, das ich mit N , zu der Potenz von 0 erhoben, multiplicire.

Folglich werde ich für das gesuchte Glied $+{}_1N^0$ haben, das ich in das Dreyeck stelle, wie man es hier sieht.

Est ist zu bemerken, daß die Berechnung den Coefficienten dieses Gliedes gleich der zweyten Elementare des zweyten additionellen Dreyeckes gemacht hat, so wie dieß immer bey der Verfertigung der übrigen Formular-Dreyecke geschehen wird, deren Coefficient des ersten Gliedes der zweyten Verticalreihe immer gleich seyn wird der zweyten Elementare des correspondirenden additionellen Dreyeckes.

Nun soll ich das zweyte Glied der zweyten Verticalreihe finden, ich sage daher:

Dieses Glied $= {}^p_p = 1$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= + d \left(\overset{v}{n} + \bar{n} - 3 \right) = + 1 \times (2 + 2 - 3) = + 1 \times 1 = + 1$; was ich aufmerke.

Es ist noch $= \left(\overset{\Delta}{b} - 1 \right) \overset{C \Delta C}{t} = 1 \times 1 = + 1$, was ich aufmerke.

Ich habe also im Ganzen $+ 1 + 1 + 1 = + 3$, die nach Vorschrift der Formel multiplicirt und *exponirt* mir $+ 3 N^1$ für das gesuchte Glied gibt.

I.

Welches ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

$$\begin{array}{r} 1N^1 + 1N^0 \\ 1N^2 + 3N^1 \\ 1N^3 \end{array}$$

Ich schreite zu der Aufsuchung des vertical nachfolgenden Gliedes, und ich sage: dieses Glied $= \overset{v}{p} = + 3$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= d \left(\overset{v}{n} + \bar{n} - 3 \right) = 1 \times (3 + 2 - 3) = 2$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= \left(\overset{\Delta}{b} - 1 \right) \overset{C \Delta C}{t} = 1 \times 1 = 1$, was ich aufmerke.

Folglich habe ich im Ganzen $+ 3 + 2 + 1 = + 6$, die, multiplicirt und *exponirt* wie gewöhnlich, mir $+ 6 N^2$ für das gesuchte Glied geben, welches ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

I

$$\begin{array}{r} 1N^1 + 1N^0 \\ 1N^2 + 3N^1 \\ 1N^3 + 6N^2 \end{array}$$

Nun habe ich das erste Glied der 3ten Verticalreihe zu finden, ich sage daher:

Dieses Glied $= \overset{v}{p} = 0$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= + d \left(\overset{v}{n} + \bar{n} - 3 \right) = + 1 \times (1 + 3 - 3) = 1$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= \left(\overset{\Delta}{b} - 1 \right) \overset{C \Delta C}{t} = 1 \times - 1 = - 1$, was ich aufmerke.

Ich habe daher im Ganzen $+ 0 + 1 - 1 = + 0$, das, um dem Mechanismus der Berechnung zu folgen, multiplicirt und *exponirt*, $+ 0 N^0$ für das gesuchte Glied gibt, das ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht.

I

Nun suche ich das vertical darauffolgende Glied, und sage:

$$\begin{array}{r} 1N^1 + 1N^0 \\ 1N^2 + 3N^1 + 0N^0 \\ 1N^3 + 6N^2 \end{array}$$

H

Dieses Glied ist $= p' = 0$

Es ist noch $= + d \left(\overset{v}{n} + \overset{-}{n} - 3 \right) = 3 \times (2 + 3 - 3) = + 6$, was ich aufmerke.

Es ist noch $= \left(\overset{a}{b} - 1 \right) \overset{C \Delta C}{t} = 1 \times -1 = -1$, was ich aufmerke.

Folglich habe ich im Ganzen $+ 0 + 6 - 1 = + 5$, das, multiplicirt und exponirt wie gewöhnlich, mir $+ 5 N^1$ für das gesuchte Glied gibt, welches ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht. I

Endlich da ich das erste Glied der vierten Vertical- $1 N^1 + 1 N^0$ reihe aufsuchen muß, so bemerke ich gleich, daß je- $1 N^2 + 3 N^1 + 0 N^0$ des der drey Glieder der Formel mir 0 geben, folg- $1 N^3 + 6 N^2 + 5 N^1$ lich ist das gesuchte Glied $0 N^0$, das ich in das Dreyeck stelle, wie man hier sieht. I

$$\begin{array}{l} 1 N^1 + 1 N^0 \\ 1 N^2 + 3 N^1 + 0 N^0 \\ 1 N^3 + 6 N^2 + 5 N^1 + 0 N^0 \end{array}$$

Diese vier Formeln werden hinlänglich seyn, um einen Begriff von der Verfertigung zu geben, so wie sie die Berechnung scheint festgesetzt zu haben; es wird leicht seyn, es nach Belieben fortzusetzen.

Die übrigen besonderen Formular-Dreyecke, vom ersten bis zum letzten in's Unendliche, werden durch das Element, auf die nämliche Formel angewendet, gebildet werden können.

Wenn man die besonderen Formular-Dreyecke aus bloßen Coefficienten verfertigen wollte, so, daß man die Formeln lesen könnte, als ob sie auf das Papier in ihrem ganzen algebraischen Ausdrucke niedergeschrieben wären, so wie dieß für das erste dieser Dreyecke geschehen ist, so müßte man die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. w. darneben und vertical außerhalb dem Dreyecke stellen, diese Reihe als Wurzeln ansehen, und die Formel folgender Weise verändern.

Glied $= \left(p + d(r - 2) + \left(\overset{a}{b} - 1 \right) \overset{C \Delta C}{t} \right) \Delta \left(\overset{C}{s} \Delta \overset{a}{b} \right)$ Und das Element auf die Formel angewendet, würde die sechs ersten Formular-Dreyecke folgender Weise bilden; der Buchstabe r als Wurzel bedeutend angenommen.

Bildung der besonderen Formular-Dreyecke.

| | |
|---|--|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 0.....1 |
| 2 | 1. 1. 0.....2 |
| 3 | 1. 3. 2. 0..... 6 |
| 4 | 1. 6. 11. 6. 0.....24 |
| 5 | 1.10. 35. 50. 24. 0.....120 |
| 6 | 1.15. 85.225. 274. 120. 0.....720 |
| 7 | 1.21.175.735.1624.1764.720. 0.....5040 |

| | |
|---|--|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 1.....1 |
| 2 | 1. 3. 0..... 2 |
| 3 | 1. 6. 5. 0..... 6 |
| 4 | 1.10. 23. 14. 0.....24 |
| 5 | 1.15. 65. 105. 54. 0.....120 |
| 6 | 1.21.145. 435. 574. 264. 0.....720 |
| 7 | 1.28.280.1330.3199.3682.1560. 0.....5040 |

| | |
|---|---------------------------------|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 2.....1 |
| 2 | 1. 5. 0.....2 |
| 3 | 1. 9. 8. 0.....6 |
| 4 | 1.14. 35. 22. 0.....24 |
| 5 | 1.20. 95.160. 84. 0.....120 |
| 6 | 1.27.205.654.875.408. 0.....720 |

| | |
|---|----------------------------------|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 3.....1 |
| 2 | 1. 7. 0.....2 |
| 3 | 1.12. 11. 0..... 6 |
| 4 | 1.18. 47. 30. 0.....24 |
| 5 | 1.25.125.215. 114. 0.....120 |
| 6 | 1.33.265.855.1174.552. 0.....720 |

| | |
|---|-----------------------------------|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 4.....1 |
| 2 | 1. 9. 0..... 2 |
| 3 | 1.15. 14. 0..... 6 |
| 4 | 1.22. 59. 38. 0.....24 |
| 5 | 1.30.155. 270. 144. 0.....120 |
| 6 | 1.39.325.1065.1474.696. 0.....720 |

| | |
|---|-----------------------------------|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 5.....1 |
| 2 | 1.11. 0..... 2 |
| 3 | 1.18. 17. 0..... 6 |
| 4 | 1.26. 71. 46. 0.....24 |
| 5 | 1.35.185. 325. 174. 0..... 120 |
| 6 | 1.45.385.1275.1774.840. 0.....720 |

| | |
|---|--------------------------------------|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1. 24..... 1 |
| 2 | 1. 49. 0..... 2 |
| 3 | 1. 75. 74. 0..... 6 |
| 4 | 1.102. 299. 198. 0.....24 |
| 5 | 1.130. 755.1370. 744. 0.....120 |
| 6 | 1.159.1525.5265.7474.3576. 0.....720 |

| | |
|---|---|
| 0 | I....1 |
| 1 | 1.120..... 1 |
| 2 | 1.241. 0..... 2 |
| 3 | 1.363. 362. 0..... 6 |
| 4 | 1.486.1451. 966. 0..... 24 |
| 5 | 1.610.3635. 6650. 3624. 0.....120 |
| 6 | 1.735.7285.25425.36274.17400. 0.....720 |

Da die Divisoren überall gleich sind der Summe der Coefficienten der Formel, dividirt durch die afficirende Basis des Dreyeckes, so wird man alle diese Formeln auf obbenannte Weise lesen können: man

wird zum Beyspiel die letzte Formel des letzten dieser Dreyecke so lesen können:

Glied des additionellen Dreyeckes, dessen Basis 121 ist
 $= (1 n^6 + 735 n^5 + 7285 n^4 + 25425 n^3 + 36274 n^2 + 17400 n) \div 720$, indem man n für die Diagonal-Anzahl der Glieder der siebenten Diagonalreihe des nämlichen Diagonal-Dreyeckes nimmt.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, wie viele Wichtigkeit die Berechnung in dem Hervorbringen dieser Dreyecke scheint gesetzt zu haben, und daß es nur mittelst der Elemente und der Formeln ist, daß dieses Statt findet; daher man diesem ersten Theile mit Recht den Titel: *Elementar, Triangular, Formular Arithmetik*, gegeben hat.

Zweyter Theil.

Von der Geometrie.

Einleitung.

Statt einer Vorrede werde ich nur Plato's Sprichwort wiederholen: daß der zweyte Flügel des Mathematikers die Geometrie ist: es liegt in der Natur der beyden Flügel sich wechselseitig zu helfen; damit die Unthätigkeit des einen die Unthätigkeit oder Abweichung des andern nicht nach sich ziehe. Es ist eine erkannte Wahrheit, daß die Arithmetik der Geometrie behülflich ist, um Resultate hervor zu bringen, die bloß als geometrisch betrachtet werden; es ist aber nicht so deutlich, daß hier eine Reciprocität von Seite der Geometrie Statt findet; es ist nicht so klar, daß die Geometrie der Arithmetik behülflich ist, um Resultate hervor zu bringen, die bloß als arithmetische betrachtet werden.

Ich werde trachten darzuthun, daß diese Reciprocität durch die Berechnung fest gesetzt worden, so zwar, daß die Arithmetik, unterstützt durch die Geometrie, arithmetico-geometrische Resultate hervor gebracht hat, welche der Arithmetiker, der nicht sogleich Geometer ist, als fehlerhaft ansehen würde; und, indem ich dieß thue, werde ich mich der im ersten Theile übernommenen Verbindlichkeit befreyen.

Wenn die Berechnung, wie ich es im ersten Theile gezeigt habe, arithmetische Resultate mittelst der Dreyecke, der Elemente und einer Formel hervor gebracht hat, so kann man daraus schliessen, daß sie keine andere Mittel in der Geometrie, zu welcher die Dreyecke vorzüglich gehören, gebrauchen werde.

Und wenn ich gezeigt habe, wie groß der Einfluss der Elemente in den bloß arithmetischen Operationen ist, so werde ich trachten zu zeigen, daß dieser Einfluss nicht weniger groß in den geometrischen Operationen sey; und daß, weil man ihn mißkannte, man öfters die wahren Resultate verfehlte, und für Urgrundsätze nahm, was nur abgeleitete Grundsätze waren.

VON DER GEOMETRIE

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet. Sie ist eine Wissenschaft, die sich mit den Eigenschaften der Körper beschäftigt, und die Grundsätze der Arithmetik auf sie anwendet.

Von den Dreyecken.

Vom rechtwinkligen Dreyecke, dessen Seiten proportionirt sind.

Ich gebe diesem Dreyecke den Vorzug, weil die Berechnung aus einer besonderen Vorliebe seine Seiten in eine arithmetische Proportion gestellt hat, und es dadurch fähiger ist, geometrische Resultate hervor zu bringen, die Folge wird zeigen, ob ich gut gewählt habe.

Ich habe daher dieses Werk angefangen mit der Beschreibung eines Zirkels, indem ich ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen Seiten im arithmetischen Verhältnisse stehen, und ein rechtwinkliges Dreyeck, das einen Winkel von 60° bildet, einschrieb: diese Figur habe ich durch andere Linien vermehrt, nachdem die verschiedenen Resultate der Berechnung es erforderten.

Die Werthe des größten Theiles dieser Linien, so wie der Sinusse der Winkel, die sie bilden, habe ich in einer Liste, die man am Ende finden wird, gesammelt, damit, nachdem man selbe im Nothfalle untersucht, sie die Operationen erleichtern können.

Die Deutlichkeit und Kürze dieses Werkes war der Endzweck dieser Methode, die desto weniger unregelmäßig ist, da alle diese Werthe auf einander folgende Resultate sind der Hypothenuse DE , die ich als $= 25$ angenommen habe.

Diese Methode befreyet mich daher nicht allein, meine Leser mit allgemein bekannten Beweisen der Elementargrundsätze der Geometrie aufzuhalten, sondern auch mich in analytische Beweise einzulassen, welche scheinen könnten eines höheren Ranges zu seyn, oder den Charakter der Neuheit mit sich zu führen.

Die einzige Verbindlichkeit, die ich darüber eingehen kann, ist, den Beweis nur im Falle eines ausführlich begründeten Widerspruches zu liefern.

Mittelst dieser Vorbegriffe kann ich den Anfang machen mit der *Oberfläche der Dreyecke* im Allgemeinen.

Der Satz, der als erster Grundsatz von allen Geometern angegeben wird, um die Oberfläche eines jeden Dreyeckes zu finden, ist, wie bekannt, folgender:

Die Oberfläche ist gleich der Grundlinie multiplicirt, mit der Hälfte der senkrechten, so vom Scheitel des Dreyeckes auf die Grundlinie gezogen ist.

Die Evidenz dieses Satzes ist anerkannt, ich spreche ihm nur die Eigenschaft eines ersten Grundsatzes ab.

Unter dem ersten oder Elementargrundsätze verstehe ich denjenigen, der keinen andern allgemeinen Grundsatz, aus dem er entspringt, anerkennt, denn wenn er daraus entspringt, so ist er nur das Corollarium eines allgemeineren Grundsatzes.

Und diess ist der Fall bey dem vorgeblichen ersten Grundsätze, so uns die Geometer angeben, um die Oberfläche des Dreyeckes zu finden, denn er entspringt aus folgendem Grundsätze, den ich so lange für ersten Grundsatz halten werde, als ich keinen andern, aus dem er entspringt, kennen werde; nähmlich:

Die Oberfläche eines Dreyeckes ist gleich einer jeden halben Seite, multiplicirt mit der geraden Linie, welche nach Belieben vom Scheitel auf diese Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels, so diese Linie auf diese Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung bildet.

Ueberhaupt scheint die Berechnung kein besonderes Vorrecht der senkrechten gegeben zu haben, vor jeder anderen geraden und schiefen Linie, welche vom Scheitel auf eine jede Seite eines Dreyeckes, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist.

Auch wird im Allgemeinen die senkrechte, die vom gegebenen Punkte *A* auf *CE* oder ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, immer gleich seyn jeder schiefen Linie, welche vom nähmlichen Punkte *A* auf *CE* oder ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels, so die schiefe Linie auf *CE* oder ihre Verlängerung macht.

Diess ist ein erster Beweis des Einflusses des Elementes, mißkannt im vorgeblichen Elementargrundsätze, der die Oberfläche des Drey-

eckes aus dem Producte der Grundfläche mit der halben Höhe bestimmt; indem diese halbe Höhe multiplicirt ist mit dem Elemente, als Werth des Sinus des Auffallswinkels, so die Höhe (das heißt, die senkrechte) auf die Grundlinie macht.

Wenn man dieses auf die Parallelogrammen und Trapezen anwendet, so wird man haben:

In jedem Parallelogramme oder Trapeze ist die Oberfläche gleich der halben Summe der beyden parallelen Seiten, multiplicirt mit einer geraden Linie, so von einem beliebigen Puncte einer dieser parallelen Seiten auf einen beliebigen Punct der andern parallelen Seite oder ihrer unbestimmten Verlängerung gezogen ist; das Product multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels, so diese gerade Linie auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung macht.

Und diess ist ein zweyter Beweis des Einflusses des Elementes, mißkannt im Satze, der die Oberfläche eines Parallelogrammes oder Trapez, aus der halben Summe der beyden parallelen Seiten, multiplicirt mit der Höhe, bestimmt, indem diese Höhe multiplicirt ist mit dem Elemente, Werth des Sinus des Winkels, so die Höhe (das heißt, die senkrechte) auf eine der parallelen Seiten macht.

Der Einfluß des Elementes, leicht zu begreifen in den gegebenen Fällen wegen ihrer Einfachheit, ist schwerer zu erkennen in verwickelten Fällen, wovon ich in der Folge Meldung machen werde.

Der Durchmesser DE , Hypothenuse des Dreyeckes ADE , dessen Seiten proportionirt sind, als 25 angenommen, bestimmt also das ganze Dreyeck; denn es folgt daraus, daß AD größter Schenkel des rechten Winkels $= 20$; daß AE kleinster Schenkel $= 15$, die senkrechte $AB = 12$.

der Sinus des Winkels $DAE = 1$.

der Sinus des Winkels $AED = 0,8$.

des Sinus des Winkels $ADE = 0,6$.

das Product dieser beyden Sinusse $= 0,48$.

ihre Summe $= 1,4$

das Product der drey Sinusse auch $= 0,48$.

die Summe der drey Sinusse $= 2,4$.

die Oberfläche $= 150$.

Dieses Dreyeck also bestimmt, wird auch alle übrige Dreyecke der Figur bestimmen, mittelst der Formeln, deren Verzeichniß diesem zweyten Theile beygefügt ist.

Und folglich wird die Berechnung in diesem zweyten Theile, so wie im ersten, die Elemente, die Dreyecke, und die Formeln gebrauchen.

Und durch diese Mittel wird sie Elementar - Grundsätze bestimmen, so ich bis auf die Zeit, wo ich schrieb, nicht kannte.

Allein, da in den auf einander folgenden Resultaten sich viele befinden, die sich mit einer unendlichen Reihe in ihren Decimalbrüchen endigen, so wird es vorher nothwendig seyn, dem Leser mittelst einer kleinen Digression die Bemerkungen vorzulegen, welche ich über den Gang und die Analogie gemacht habe, so die Berechnung in diesen, aus den ersten Operationen der Arithmetik entspringenden, unendlichen Reihen beobachtet zu haben scheint; indem ich ihn bitte, kein Urtheil über diese Bemerkungen zu fällen, bevor er nicht ihre Anwendung wird gesehen haben, die in diesem ganzen zweyten Theile zerstreut seyn wird.

Von der Addition und Subtraction der Resultate, so mit einer unendlichen Reihe in ihren Decimalbrüchen endigen.

Ich muß vorher bemerken, daß der Buchstabe *s*, über eine Ziffer gestellt, andeuten wird, daß diese Ziffer in das Unendliche wiederholt angenommen wird. Also der numerische Ausdruck der Linie oder Seite *by* des Dreyeckes *byc*, welche gleich ist $13,3^s$, bedeutet, daß der Werth von *by* = dreyzehn mit einer unendlichen Reihe von 3.

Es sey zu addiren $by = 13,3^s$

und die Seite $bD = 16,6^s$

so wird $by + bD = 30,0$

Jeder Leser, der nur einen ersten Begriff der Infinitesimal - Rechnung hat, wird gewiß die Richtigkeit des Resultates dieser Addition nicht streitig machen; denn, wenn man annimmt, daß 3^s und 6^s in das Unendliche wiederholt sind, so wird daraus folgen, daß die Summe gleich ist 29, mit einer unendlichen Reihe von 9: diese Summe wird daher $29,9^s$.

Wenn man nun annimmt, daß man zu dem letzten ger dieser unendlichen Reihe den kleinsten Werth addirt, den man sich einbilden kann, das heißt, das unendlich Kleine, so man durch $0,0^s1$ ausdrücken kann, das heißt, durch die Einheit, der eine unendliche Reihe von Nullen vorgeht, so ist es evident, daß die Summe dieser Addition $= 30,0^s$ seyn wird; sie wird daher dem vorigen Resultate gleich seyn; folglich ist $30 = 29,9^s$; $0,9^s = 1$, und $9,9^s = 10$.

Die Addirung eines unendlich kleinen Werthes zu $29,9^s$ hat diese letzte Summe nicht verändern können, weil die Kleinheit dieses Werthes sich der Einbildungskraft beynahe entzieht.

Für diejenigen, welche diese unstreitbare Wahrheit noch bezweifeln könnten, werde ich hinzu setzen, das ein fernerer Beweis, daß $30 = 29,9^s$, und $10 = 9,9^s$ ist, sich findet, wenn man die Quadratwurzel von 30, und die Quadratwurzel von $29,9^s$ auszieht, diese beyden Wurzeln werden gleich seyn: ebenfalls werden die Quadratwurzel von 10 und von $9,9^s$ einander gleich seyn, es mag die Anzahl der Ziffern dieser Wurzel so groß seyn als man will.

Ueberhaupt wird jede Zahl gleich seyn dieser nähmlichen Zahl weniger 1, mit einer unendlichen Reihe von 9, weil die Einheit gleich der unendlichen Reihe von 9, $= 0,9^s$ ist.

Folglich ist das Element $= 0,9^s = 1$, und die combinirten Elemente $= 9,9^s = 10$, die combinirten Elemente $0,1 = 0,09^s$. Folglich $0,0^s1 = 0,0^s09$; folglich $10^s = 9,9^s$.

Wenn man aus jedem Gliede dieser Gleichungen die Quadratwurzel zieht; so werden sie respective einander gleich seyn.

Ich habe ein wenig bey dieser Materie verweilt, weil die Berechnung sie anwendet in Resultate eines höheren Interesse, wovon ich in der Folge reden werde.

Wenn man die Seiten, deren Summe-gleich *by* ist, addiren wollte so könnte man die Addition nur machen, nachdem man die Decimalen folgender Weise ausgeglichen hat.

$$\begin{cases} bV = 8,3^s \\ VP = 0,8 \\ PL = 1,283^s \\ Ly = 2,916^s \end{cases}$$

$$bV = 8,333^s$$

$$VP = 0,800$$

$$PL = 1,283^s$$

$$Ly = 2,916^s$$

$$= 13,333^s$$

Und dann wird man haben
welches gleich ist $13,3^s$ Werthe von by .

Aus diesem wird es leicht seyn, die Anwendung auf die Subtraction zu machen.

Von der Multiplication und Division der Resultate, welche in ihren Decimalbrüchen mit unendlichen Reihen endigen.

Die allgemeine Regel für die Multiplication der Resultate, die mit einer unendlichen Reihe endigen, und die ich mittelst des gleichförmigen Ganges der Berechnung beobachtet zu haben glaube, ist folgende:

Nachdem man die Multiplication, wie gewöhnlich gemacht hat, so setzt man den letzten Ziffern des Resultates für jeden Factor, der durch eine unendliche Reihe endigt, so viel neunte Theile des andern Factors bey, als Einheiten sind in der Ziffer, so die Reihe bestimmt.

Zum Beyspiel: wenn man 36 mit $0,027^s$ zu multipliciren hätte, so würde man es, wie in der nebenstehenden Operation thun, aus welcher man sieht, daß das Resultat die Einheit als Product dieser Multiplication angibt.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 0,027^s \\ \hline 252 \\ 72 \\ \hline \frac{7}{9} \text{ von } 36 \dots 28 \\ \hline 1,000 \end{array}$$

Der Beweis der Richtigkeit dieses Resultates findet sich durch die Division, denn wenn man die Einheit durch 36 dividirt, so wird der Quotient $0,027^s$ geben, wie es die hier nebenstehende Operation zeigt.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 36 \\ 10 \quad \times 0,027^s \\ 100 \\ 280 \\ \hline 28 \text{ Rest } \frac{7}{9} \text{ des Divisors} \end{array}$$

Operation, welche immer einen Rest überlassen wird, der gleich seyn wird so vielen neunten Theilen des Divisors, als es Einheiten gibt, in der letzten Ziffer des Quotienten, der die Reihe bestimmt.

Man kann so viele Ziffer im Quotienten nehmen, als man will, ohne daß dieß den Werth vermehren wird, wie man es sehen kann, wenn man zum Beyspiel $0,027777^s$ mit 36 multiplicirt; Multiplication, welche ebenfalls die Einheit als Resultat geben wird.

Und dieß ist ein fernerer Beweis, daß die unendliche Reihe von 9 oder $0,9^s = 1$ ist; denn wenn man annimmt, daß die Reihe von 7^s in das Unendliche verlängert wird, die Multiplication mit 36 wird für das Product eine unendliche Reihe von 9^s geendigt mit den Ziffern 72 geben, die man daher nach Belieben verwerfen, oder mit $\frac{7}{9}$ des Multipliers 36 completiren kann.

All dasjenige was gesagt worden, liegt in der Natur der Sache, es ist eine Wahrheit, die aus der Regel der Proportionen entspringt, so die Berechnung zur Grundfeste der mathematischen Wissenschaften bestimmt hat: indem man in jeder Multiplication, so wie in jeder Division, folgende Proportionen findet:

Das Element verhält sich zum ersten Factor, wie der zweyte Factor zum Product.

Der Dividendus verhält sich zum Divisor, wie der Quotient zum Elemente.

Ausnahmen von dieser Regel fest setzen, hiesse die Analogie der Berechnung in der ersten Grundfeste der Mathematik erschüttern: es wäre den Pyrrhonismus in eine Wissenschaft einführen, deren charakteristische Merkmahe die Klarheit und Evidenz sind.

Folglich, wenn ich nicht zugleich diejenigen Resultate finde, die ich suche, und die Schuld der Analogie der Berechnung zuschreibe; so schaffe ich mir selbst eine Schwierigkeit, die mich hindert fortzufahren, und die ich nur durch eine beständige Aufmerksamkeit auf ihren wahren Gang überschreiten kann.

Ich werde dieß durch ein Beyspiel erläutern:

Sey EC der Halbmesser und Cb die Secante des Winkels VCD ; bD sey die Tangente; so wird Dy der Sinus dieses Winkels seyn; und die Hälfte von AD : folglich $Dy = 10$; folglich der Winkel $VCD =$ dem Winkel AEC : folglich der Sinus des Winkels $VCD = 0,8$; und weil überhaupt in jedem rechtwinkeligen Dreyecke wie bCD , wenn einer der Sinussen der Winkel $= 0,8$ ist, so ist der andere Sinus $= 0,6$ (und vice versa) und das Dreyeck hat proportionirte Seiten:

folglich sind CD , Db , Cb in arithmetischer Proportion, wie 3, 4, 5; folglich, da CD der Halbmesser ist, so ist $CD = 12,5$. $Db = 16,6^s$. $bC = 20,83^s$: folglich die Oberfläche $= bC \times \frac{1}{2} Dy = 20,83^s \times 5 = 104,16^s$ wie es die Operation hier neben zeigt.

für $\frac{1}{3}$ von 5 . . . 16^s

Oberfläche bDC $104,166^s$

Wenn ich die Oberfläche durch die vorhergegebene Formel bestimme, so würde ich haben:

$$\begin{aligned} \text{Oberfläche} &= bC \times \frac{1}{2} bD \times \text{Sin. } Dbc \\ 104,16^s &= 20,83^s \times 8,3^s \times 0,6 \end{aligned}$$

wie das Resultat hier neben zeigt.

$$\begin{aligned} bC &= 20,83^s \\ \frac{1}{2} bD &= 8,3^s \\ \hline &6249 \\ &16664 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} bC &\dots\dots 6944^s \\ \frac{1}{3} (\frac{1}{2} bD) &\dots\dots 277^s \\ \hline &173,6111^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sin. } Dbc &\dots\dots 0,6 \\ \text{Oberfläche} &104,16666^s \end{aligned}$$

Wenn ich in diesem Resultate die Reihe von 6^s nicht erkenne, so liegt die Schuld an mir, und nicht an der Berechnung, weil es in meiner Macht stand, die Reihe ausgedrückt zu haben durch so viele Ziffern, als ich wollte, wenn ich in den Factoren die Anzahl der Ziffern, welche die Reihe bilden, vermehre; wenigstens forderte die Vorsicht, die Decimalen in den Factoren auszugleichen, welches mir eine mehr ausgedrückte Reihe würde gegeben haben.

Um auf die Division der Zahlen zu kommen, die in ihren Decimalbrüchen mit einer unendlichen Reihe endigen, wird es nicht überflüssig seyn, den Durchmesser des, dem Dreyecke FAC umschriebenen Zirkels, der eine solche Reihe hat, zu bestimmen.

Weil in jedem rechtwinkligen Dreyecke, dessen Seiten proportionirt sind, die senkrechte auf die Hypothenuse, die Hypothenuse in Abschnitte, die sich mit einander, wie 9 zu 16, verhalten, schneidet;

so folgt daß AB , senkrechte auf DE , selbe dergestalt schneide, daß $BE = 9$ und $BD = 16$ ist; folglich $BC = 3,5$; folglich, wenn man annimmt, daß der Halbmesser QC die halbe Peripherie DQE in zwey gleiche Theile schneidet, so wird die Sehne AF , welche QC senkrecht schneidet $= 7$, und As wird der Sinus des Winkels QCA seyn, wird gleich und parallel mit BC seyn, folglich $As = 3,5$; folglich $Cs = 12$, der Sinus des Winkels $ACQ = 0,28$; und da $Cs = AB$, folglich der Sinus $sAC = 0,96$; und weil die Dreyecke FCs und ACs gleich sind, so ist auch der Sinus des Winkels $CFs = 0,96$; folglich der Sinus des Winkels $FCA = 0,5376$; folglich, wenn man $FA = 7$ durch $0,5376$ dividirt, wird der Quotient den Durchmesser des dem Dreyecke FCA umschriebenen Zirkels $= 13,02083^s$ angeben.

Denn jedermann kennt den Grundsatz $h = \overset{\Delta}{D}$: das heißt, die Hypothenuse ist gleich dem Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels; allein ich habe nirgends gefunden, daß man es dem Dreyecke im Allgemeinen angewendet habe. Warum? weil man nicht auf den Einfluß des Elementes in der Gleichung aufmerksam gewesen, welches die Hypothenuse durch den Sinus ihres gegenüberstehenden Winkels dividirt, nämlich durch den Sinus des rechten Winkels, der das Element ist.

Aufmerksamkeit, die zu gleicher Zeit den Grundsatz allgemein gemacht, und in Folgenden würde verändert haben.

$$\overset{\text{u. s. w.}}{\Delta \cdot S. \Delta \sin} = D.$$

In jedem Dreyecke ist jede Seite, dividirt durch den Sinus des ihr gegenüber stehenden Winkels, gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Uebrigens glaube ich nicht, daß die Berechnung der Hypothenuse einen besonderen Vorzug über was immer für eine Seite eines jeden Dreyeckes zugestanden hat, so wenig als sie es der senkrechten zusteht.

Indem ich zur Division komme, sage ich: die Regel, so die Berechnung scheint fest gesetzt zu haben für die Division aller Zahlen durch Divisoren, deren Decimalbrüche mit unendlichen Reihen endigen, ist folgende:

Man soll die Division anfangen und fortsetzen wie gewöhnlich, bis

der Divisionsrest gleich sey so viel neunten Theilen des Quotienten, als es Einheiten gibt in der Ziffer, die die Reihe bestimmt.

Der Durchmesser des dem Dreyecke *FAC* umschriebenen Zirkels wird Gelegenheit geben, diese Regel zu prüfen.

In diesem Dreyecke hat man folgende Proportion:

| | | | |
|--------------|-------------------|----|----------|
| auf <i>S</i> | Sin. an. <i>S</i> | ⊙ | tot |
| Senk: | Product | :: | D : Sin. |

In jedem Dreyecke verhält sich die senkrechte auf jede Seite oder auf ihre Verlängerung zum Producte der dieser Seite anliegenden *) Sinusse, wie der Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels, zum Sinus totus.

Folglich werde ich haben:

| | | | |
|-----------------------|--------------------|-----------------------|----------|
| Senk: auf <i>FA</i> : | Sin. an. <i>FA</i> | ⊙ | tot. |
| 12 | Product | :: | D : Sin. |
| | :: | 13,02083 ^s | : 1 |

Folglich: wenn ich das Product der äußern durch ein inneres Glied, zum Beyspiel, durch 13,02083^s multiplicire, wird mir der Quotient das Product der Sinusse der an der Seite *FA* liegenden Winkel geben.

$$\begin{array}{r}
 C^s = 12,00000 \quad | \quad 13,02083^s \\
 \underline{12,000000} \qquad \quad 0,9216 \\
 2812530 \\
 2083640 \\
 7815570 \\
 3072 \quad \text{Rest } \frac{1}{3} \text{ des Quotienten.}
 \end{array}$$

Man sieht aus dieser Operation, daß der Quotient 0,9216 das Product der Sinusse der an *FA* liegenden Winkel gibt.

Man hat gesehen, und es ist leicht es durch die verschiedenen Formeln über den Sinussen zu prüfen, daß jeder der an *FA* liegenden Sinusse = 0,96, folglich ihr Product = 0,9216 ist.

Man sieht ebenfalls, daß der Divisionsrest 3072 = $\frac{1}{3}$ des Quotienten, und daher der Regel gemäß ist.

*) Kürze halber werde ich mich mehrmahls des Ausdrucks anliegenden Sinusse, statt Sinusse der anliegenden Winkel; wie auch des Ausdrucks: gegenüberstehenden und eingeschlossenen Sinusse, statt Sinusse der gegenüberstehenden und der eingeschlossenen Winkel bedienen.

Man sieht (und dieß ist wohl zu bemerken) daß dieser Ueberrest sich dergestalt bestimmt, wenn er den Dividendus, mit welchem man die Division angefangen hat, nicht mehr senkrecht afficirt; so zwar daß die Berechnung uns zu sagen scheint: ziehen sie hinter dem Dividendus eine senkrechte abwärts; der Divisionsrest, der sich gänzlich hinter dieser Linie befinden wird, geht ihnen nichts mehr an: die Division ist genau geendigt.

In der That die zuverlässigste Probe einer genauen Division ist, wenn der Divisor, multiplicirt mit dem Quotienten, den Dividendus hervor bringt, wie man hier sieht:

Ich werde in der Folge von näheren Kennzeichen einer geendigten Division reden, so die Berechnung gegeben zu haben scheint.

13,02083^s

0,9216

7812498

1302083

2604166

11718747

(Rest $\frac{1}{3}$ von)

(0,9216)

3072

12,000000000

Bevor ich fortfahre, muß ich bemerken, daß es gut wäre, die auf einander folgenden Untersuchungen der Theile der Figur aufzumerken, um die folgenden Prüfungen zu erleichtern, indem die Werthe dieser Theile unveränderlich bleiben, welches mir eine für den Leser verdrießliche Wiederhohlung ersparen wird.

Weil der Halbmesser QC die halbe Peripherie und den Bogen FQA in zwey gleiche Theile schneidet, so folget daraus, daß der Bogen $DVF =$ dem Bogen AqE ; folglich die Sehne $FD = AE = 15$; und der Winkel $FDA =$ dem Winkel $QCF =$ dem Winkel ACQ ; folglich der Sinus des Winkels $FDA = 0,28$; der Sinus des Winkels $FAD = 0,6$; der Sinus des Winkels $DFA = 0,8$, und der Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels $= 25$, wie es einleuchtet.

Ich setze voraus, daß die Sehne FO senkrecht sey auf den Halbmesser VC , folglich wird sie parallel mit AD seyn; folglich der Bogen $OD =$ dem Bogen FQA ; folglich die Sehne $OA = DF = 15$; folglich der Winkel $FLA =$ dem Winkel FCA ; folglich der Sinus des Winkels $FLA = 0,5376$; folglich der Durchmesser des dem Dreyecke FLA umschriebenen Zirkels $= 13,02083^s$; folglich $LA = 10,416^s$; und weil der Winkel $OAD =$ dem Winkel FDA , folglich $DL = LA$; folglich

$LF = 4,583^s$; folglich der Sinus des Winkels $FAL = 0,352$; $LD = 10,416^s$; folglich $LO = 4,583^s$; $DO = 7$; der Sinus des Winkels $FDO =$ dem Sinusse des Winkels $FAO = 0,352$; der Sinus des Winkels $FOA =$ dem Sinusse des Winkels $FDA = 0,28$; $OF = 8,8$; $Ly = 2,916^s$; $LP = 1,283^s$; $VP = 0,8$, $yC = 7,5$; der Sinus $DLy = 0,96$; folglich ist Fg senkrechte auf $AD = 4,2$; folglich der Sinus des Winkels $FDg = 0,96$; $Dg = 14,4$; $gA = 5,6$; der Halbmesser CV schneidet AO und DF in ihrem Durchschnittspuncte, schneidet FO und den Bogen FVO in zwey gleiche Theile.

Alle diese Folgerungen sind Resultate der Elementargrundsätze der Geometrie, so wohl aus der Lehre der Gleichheit der Dreyecke, als der Verhältnisse der Seiten zu den Sinussen der gegenüber stehenden Winkel.

Es wäre unnöthig gewesen, sich über einen so bekannten Gegenstand weiter auszudehnen.

Sey das Dreyeck FLA , worin man diese Proportion haben wird,

| | | | |
|----------|---------------|--------|--------|
| auf LA | Sinus an LA | | tot. |
| $\perp$ | : Product | :: D | : Sin. |

und weil die senkrechte auf $LA = FO \times \text{Sin. } FOA; = FL \times \text{Sin. } FLA;$
 $= FA \times \text{Sin. } FAL; = FL \times FA \text{ } \textcircled{D}$

So ist diese senkrechte $= FO \times \text{Sin. } FOA = \text{auf } LA \text{ } FL$
 $\times \text{Sin. } FLA = 8,8 \times 0,28; = 2,464; = 4,583^s$
 $\times 0,5376 = 2,464; = FA \times \text{Sin. } FAL = 7 \times 0,352 = 2,464; = 4,583^s \times FA \text{ } \textcircled{D}$
 $= 13,02083^s$

Ich werde diese letzte Gleichung prüfen, indem ich durch den Durchmesser des dem Dreyecke FLA umschriebenen Zirkels dividire.

| |
|---------------------------------------|
| $FL = 4,583^s$ |
| $FA = 7$ |
| $\hline 32,081$ |
| $\frac{1}{3} \text{ von } 7 = 2,33^s$ |
| $\hline 32,08333^s$ |

Es ist zu bemerken, daß in der ersten Gleichung keine Reihe eintritt, und daß in der letzten zwey Reihen vorkommen, und sich dennoch die durch die Berechnung fest gesetzte Regel aufrecht erhält, wie man aus der Operation sieht: woraus folgt, daß der Divisionsrest, als durch die Reihe dividirt angenommen

| |
|---|
| $13,02083^s$ |
| $\hline 2,464$ |
| $6,041673$ |
| 8333413 |
| 5209153 |
| Rest $8213^s \frac{1}{3} \text{ Quotient.}^s$ |

werden muß; weil der Quotient richtig ist, oder, was das nähmliche ist, daß man den Ueberrest nicht weiter berechnen soll, weil man bey der Multiplication des Quotienten mit dem Divisor darauf hinlängliche Rücksicht nehmen wird.

Die Richtigkeit des Quotienten selbst, ohne die, wegen den Reihen zu addirenden Theilen, beweist sich aus der ersten Gleichung.

Senkrechte auf $LA = 8,8 \times 0,28$.

Weil in der nebenstehenden Operation das Product von 8,8 mit 0,28 gleich ist 2,464 Werthe der senkrechte auf LA

$$\begin{array}{r} 8,8 \\ 0,28 \\ \hline 704 \\ 176 \\ \hline 2,464 \end{array}$$

Indem ich nun auf die Proportion zurück komme, werde ich in Zahlen haben

$$\begin{array}{ccccccc} \perp \text{ auf } LA & & \text{Sin. an } LA & & D\odot & & \text{Sin. tot.} \\ 2,464 & : & \text{Product} & :: & 13,02083' & : & 1 \end{array}$$

folglich, wenn man 2,464 durch 13,02083' dividiret, muß der Quotient mir das Product der Sinusse der an LA liegenden Winkel geben.

$$\begin{array}{r} 2,46400 \\ 13,02083' \\ \hline 0,1892352 \end{array}$$

Man sieht in nebenstehender Operation, daß der Quotient 0,1892352 gibt.

$$\begin{array}{r} 2,46400 \\ 2,464000 \\ 11619170 \\ 12025060 \\ 3063130 \\ 4589640 \\ 6833910 \\ 3234950 \\ \text{Rest } 630784 \frac{1}{2} \text{ Quot.} \end{array}$$

Denn die Sinusse der an LA liegenden Winkel sind respective gleich; nähmlich der Sinus des Winkels $FLA = 0,5376$ und der Sinus des Winkels $FAL = 0,352$; folglich ist ihr Product $= 0,1892352$ wie man hier sieht.

Indem ich nun LA kenne $= 10,416'$, und die senkrechte auf $LA = 2,464$, so wird die Oberfläche des Dreyeckes $FLA = 12,83'$ seyn; ich werde diese Oberfläche mittelst folgender Formel bestimmen:

$$\begin{array}{r} 0,5376 \\ 0,352 \\ \hline 10752 \\ 26880 \\ 16128 \\ \hline 0,1892352 \end{array}$$

In jedem Dreyecke ist die Oberfläche gleich dem Quadrate einer jeden Seite, multiplicirt mit dem halben Producte der Sinusse der an dieser Seite liegenden Winkel, dividirt durch den Sinus des der Seite gegenüberstehenden Winkels.

Folglich habe ich im Dreyecke *FLA* folgende Proportion.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Oberfläche} & : & Fa^2 & :: & \frac{FAL}{\text{Sin.}} & \times \frac{AFL}{\text{Sin.}} & : \frac{FLA}{\text{Sin.}} \\ \text{Oberfläche} & : & 49 & & 0,352 & \times 0,4 & : 0,5376 \end{array}$$

Wenn ich nun das Product der innern durch das 4te Glied dividire, so muß mir der Quotient die Oberfläche geben.

Man sieht, daß die beyden Resultate, welche die Oberfläche geben, gleich sind, ob-
 schon das erste aus einer Zahl, die eine Reihe von 6^s hat, entspringt, und das andere aus einer doppelten Multiplication und einer Division von Zahlen ohne Reihen hervor gebracht wird.

$$\begin{array}{r} 0,352 \\ 0,4 \\ \hline 0,1408 \\ 49 \\ \hline 12672 \\ 5632 \\ \hline 6,8992 \quad | \quad 0,5376 \\ 15232 \quad | \quad 12,8333^s \\ 44800 \\ 17920 \\ 17920 \\ 17920 \\ \hline \text{Rest } 17920 \frac{1}{3} \text{ Divisors.} \end{array}$$

Hier ein Beyspiel aus dem Dreyecke *FLe*, wo man diese Proportion hat:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{auf } Fe & & \text{Sin. an } Fe & & \text{tot.} & & \\ + & : & \text{Product} & : : & D & : & \text{Sin.} \\ 4,4 & : & 0,9216 & : : & 4,774305^s & : & 1 \end{array}$$

Folglich wenn man das Product der äußern = 4,4 durch 4,774305^s dividirt, muß der Quotient mir 0,9216 geben, als Werth des Productes der Sinusse der an *Fe* liegenden Winkel.

Denn, weil dieses Dreyeck gleichschenkelig ist, so ist jeder der Sinusse der an *Fe* liegenden Winkel = 0,96; und die senkrechte auf *Fe* = *PF* = 4,4.

$$\begin{array}{r} 4,400000 \quad | \quad 4,774305^s \\ 4,400000 \quad = 0,9216 \\ 10312550 \\ 7639400 \\ \hline 28650950 \\ \hline \text{Rest } 51200 \frac{1}{3} \text{ Quot.} \end{array}$$

Im nähmlichen Dreyecke *FLe* hat man noch folgende Proportion:

| auf <i>Le</i> | | Sin. an <i>Le</i> | | ⊙ | | tot. |
|---------------|---|-------------------|----|-----------------------|---|------|
| + | : | Product | :: | <i>D</i> | : | Sin. |
| 2,464 | : | 0,516096 | :: | 4,774305 ^s | : | 1 |

Folglich, wenn ich 2,464 mit 4,774305^s dividire, muß der Quotient mir 0,516096 geben, als das Product der Sinusse der an *Le* liegenden Winkel.

Die Sinusse der an *Le* liegenden Winkel sind=der eine 0,96 und der andere 0,5376, folglich ist ihr Product=0,516096, und man hat vorher gesehen, daß die senkrechte auf *LA*=2,464 sey.

| | |
|-------------|-----------------------|
| 2,464000 | 4,774305 ^s |
| 2,4640000 | 0,516096 |
| 7684750 | |
| 29104450 | |
| 45862000 | |
| 28932550 | |
| Rest 286720 | $\frac{5}{8}$ Quot. |

Dies scheint mir hinlänglich zu seyn, um die Analogie der Berechnung fest zu setzen, und um die allgemeine Regel anzunehmen, welche sie scheint bestimmt zu haben für die Multiplication und Division bey unendlichen Reihen.

Ich werde bloß hinzu fügen, daß, wenn man die Quadraten der Seiten des Viereckes *bDCA* zusammen addirt, wird ihre Summe gleich seyn der Summe der Quadraten der Diagonalen *bC* und *DA*, mehr dem vierfachen Quadrate der Linie *Ly*, die die Mittelpuncte dieser Diagonalen zusammen füget, und man wird die Bestätigung haben des Theorems des berühmten Herrn Euler zu S. Petersburg.

| | | | |
|------------------------------------|--|--------------------------------------|--|
| Seite <i>bA</i> =16,6 ^s | <i>bA</i> ² =277,777 ^s | Diag. <i>bC</i> =20,83 ^s | <i>bC</i> ² =434,027 ^s |
| ... <i>bD</i> =16,6 ^s | <i>bD</i> ² =277,777 ^s | Diag. <i>AD</i> =20, | <i>AD</i> ² =400, |
| ... <i>DC</i> =12,5 | <i>DC</i> ² =156,25 | Linie <i>Ly</i> = 2,916 ^s | <i>Ly</i> ² = 34,027 ^s |
| ... <i>AC</i> =12,5 | <i>AC</i> ² =156,25 | | Summe=868,055 ^s |
| | Summe=868,055 ^s | | |

Hier noch ein Beyspiel der Addition und Subtraction,

$$b\pi = 5,2083^s$$

$$\pi V = 3,1250^s$$

$$V\pi = 0,8000^s$$

$$PL = 1,2833^s$$

$$Ly = 2,9166^s$$

$$yh = 1,6666^s$$

$$hc = 5,8333^s$$

$$Cb = 20,8333^s$$

$$bV = 8,3333^s$$

$$VC = 12,5000^s$$

*Von den Verwerfungen, so die Berechnung in Decimal-
brüchen zu erlauben scheint.*

Alle Mathematiker kennen die Nothwendigkeit, in mehreren Fällen einige der Decimaltheile zu verwerfen oder zu vernachlässigen, deren Anzahl sonst die Operationen verwirren würde; allein ich habe gesehen, daß diese Verwerfungen ziemlich willkürlich geschehen, obschon ich nicht entfernt bin zu glauben, daß sie bestimmten Regeln unterworfen seyn sollen.

Und weil der einzige Endweck dieser Schrift die Erforschung der Wahrheit ist, welche mit mehr Pracht in den mathematischen Wissenschaften glänzt; so werde ich mit Aufrichtigkeit die Resultate meiner Nachforschungen vorlegen, indem ich die Schwierigkeiten, denen ich zu begegnen vermuthe, aufsuchen werde; und wenn ich demnach eine Meinung äußere, so wird diese nur vorläufig seyn, bis daß aufgeklärte Mathematiker ihr beystimmen werden.

Die Methode, um mit der größten Gewissheit die Regeln zu kennen, von denen ich eben geredet habe; ist (wenn ich mich nicht irre) zu beobachten, wie die Berechnung selbst sich bey Verwerfungen dieser Art benimmt.

Wenn ich multiplicire, wenn ich dividire, wenn ich was immer für eine Wurzel ausziehe, ohne anderen Zweck, als ein Product, einen Quotient und eine Wurzel zu haben, alsdann wird meine Arbeit nur durch die Willkühr, oder die Ermüdung begrenzt.

Wenn ich aber einen bestimmten Endzweck habe, besonders wenn er mir im Voraus aus anderen *Resultaten* bekannt ist, alsdann bin ich im Stande den Gang der Berechnung mit Nutzen zu beobachten, und seine Analogie aus der Vergleichung verschiedener *Resultate* zu bestimmen; ich kann unterscheiden, selbst in zusammen gesetzten Operationen, wie sie wirkt, um die Resultate, die ich suche, hervor zu bringen.

So zwar, daß die Erkenntniß der Regel, welche darüber fest gesetzt werden könnte, von der Entscheidung dieser Frage abhängt: Wie benimmt sich die Berechnung, um diese Verwerfungen zu machen? und diese Frage läßt sich aus der Vergleichung vieler *Resultate* beantworten.

Weil die Zeit mir nicht erlaubt, bey diesem Gegenstande lange zu verweilen, so werde ich mich begnügen, die vorhergehenden *Resultate* zu beobachten, und die Aufmerksamkeit auf diejenigen zu leiten, welche man in der Folge dieses Werkes antreffen wird.

Indem ich nun die vorhergehenden Divisionen von neuem untersuche, so beobachte ich: 1. Daß die Decimalbrüche überhaupt keine Zehnmillion-Theile haben.

2. Daß, wenn man gleich hinter dem ersten Divisionstheile eine senkrechte abwärts zieht, die Summen, welche sich gänzlich hinter dieser Linie befinden, die Ueberreste der Divisionen sind.

Es gibt nur eine Division, so davon ausgenommen ist; diejenige, deren Quotient gleich 0,1892352 ist, welche zwey Zehnmillionen-Theile hat, und bey welcher die senkrechte um eine Ziffer weiter gezogen werden soll, damit der Ueberrest allein hinter dieser Linie sey.

Allein ich beobachte, daß dieses vielleicht deswegen geschieht, weil der Quotient Zehnmillionen-Theile hat, so, daß dieses eine regelmäßige Ausnahme machen würde

Ich beobachte noch, daß dieser *Quotient* die Zehnmillionen-Theile (wenigstens in diesem *Resultate*) entbehren kann, weil, wenn man ihm auf sechs Decimale beschränkt, und ihn dergestalt mit dem Divisor multiplicirt, er den Dividendus weniger eins hervor bringen wird, mit einer Reihe von gern so stark ausgedrückt, als man für gut finden wird, die Reihe von 3ern in dem Divisor auszudrücken.

Es könnte also die Linie wie bey den übrigen Divisionen gezogen

werden, da der vorige Divisionstheil zum Ueberreste der Division wird; doch mit Ausnahme, daß dieser Ueberrest nicht die Eigenschaft hat, das Drittel des Quotienten zu seyn.

Es scheint mir daher, besser eine regelmäßige Ausnahme anzunehmen, als ein *Resultat*, wovon die Berechnung die Richtigkeit gezeigt hat, zu verstümmeln.

Bey der letzten Division, wo man das Product der an *Le* nahe liegenden Sinusse sucht, indem man die senkrechte auf *Le* durch den Durchmesser des dem Dreyecke *FLe* umschriebenen Zirkels dividirt, so wird man finden, daß diese Beobachtungen sich dergestalt bestätigen, daß der letzte Divisionstheil die Millionen-Theile in der Ziffer 6 des Quotienten gibt, und daß der Ueberrest der Division nur dazu dienet, um die Reihe von 5^s in der letzten Ziffer des Divisors zu bestimmen.

Um dieses näher zu beobachten, werde ich diese Divisionen dergestalt verändern, daß die Quotienten zu Divisoren, und die Divisoren zu Quotienten werden.

| | |
|---|---|
| $ \begin{array}{r} 12,0000 \quad \quad 0,9216 \\ 2\,7840 \quad 13,02083^s \\ \underline{1920} \\ 19200 \\ \underline{7680} \\ 76800 \\ \underline{30720} \\ \text{Reste } 3072 \quad \frac{1}{3} \text{ Divisors.} \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 32,083^s \quad \quad 2,464 \\ 7443 \quad 13,02083^s \\ \underline{513} \\ 5133 \\ \underline{2053} \\ 20533 \\ \underline{8213} \\ \text{Reste } 8213 \quad \frac{1}{3} \text{ Divisors.} \end{array} $ |
|---|---|

| | |
|--|---|
| $ \begin{array}{r} 2,4640000 \quad \quad 0,1892352 \\ 5716480 \quad 13,020833^s \\ \underline{394240} \\ 3942400 \\ \underline{1576960} \\ 15769600 \\ \underline{6307840} \\ 6307840 \\ \text{Reste } 6307820 \quad \frac{1}{3} \text{ Divisors.} \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 6,89920 \quad \quad 12,83333^s \\ 6,899200 \quad 0,5376 \\ \underline{4825350} \\ 9753510 \\ \underline{7701790} \\ 17920 \quad \frac{1}{3} \text{ des Quotienten.} \end{array} $ |
|--|---|

$$4,40000 \mid 0,92160$$

$$713600 \quad 4,774305^s$$

$$684800$$

$$396800$$

$$281600$$

$$51200$$

$$512000$$

Reste 51200 $\frac{5}{9}$ Divisors.

$$2,464000 \mid 0,516096$$

$$3996160 \quad 4,774305^s$$

$$3834880$$

$$2222080$$

$$1576960$$

$$286720$$

$$2867200$$

Reste 286720 $\frac{5}{9}$ Divisors.

Hier sind also im Ganzen 12 Divisionen, die mir nichts Bestimmtes über die Verwerfungen geben, sie geben mir nur Annäherungen; es ist aber die Vergleichung dieser Annäherungen, die, wenn ich nicht irre, mir die Analogie der Berechnung oder die Gleichförmigkeit ihres Ganges, wenigstens in so fern es diese 12 Divisionen betrifft, zeigen wird.

Das Resultat dieser Annäherungen scheint sich auf folgende Punkte zu beschränken.

1. Die Decimalen gleich zu machen, wie groß auch ihre Anzahl im Dividendus oder im Divisor seyn mag.

2. Wenn die Anzahl der so gleich gemachten Decimalen weniger als 6 ist, so soll man diese Anzahl bis auf 6 Decimalen bringen.

3. Eine senkrechte abwärts zu ziehen, oder als gezogen anzunehmen, hinter der letzten Decimal des Dividendus.

4. Auf den Divisionstheil, der sich hinter dieser Linie findet, nicht mehr zu achten, sondern die Division als geendigt anzusehen.

Ich werde untersuchen, ob dieser Mechanismus gleichförmig für diese 12 Divisionen ist, und alsdann sollen die Mathematiker urtheilen, ob diese Gleichförmigkeit hinlänglich ist, um die Analogie der Berechnung fest zu setzen.

$$12,000000 \mid 0,921600$$

$$2784000 \quad 13,020833^s$$

$$192000$$

$$1920000$$

$$768000$$

$$7680000$$

$$3072000$$

$$3072000$$

Reste 307200 $\frac{1}{3}$ Divisors.

$$12,000000 \mid 13,020833^s$$

$$12,0000000 \quad 0,9216$$

$$28125030$$

$$20833640$$

$$78128070$$

Reste 3072 $\frac{1}{3}$ des Quotienten.

$$\begin{array}{r}
 32,083333^s \quad | \quad 13,020833^s \\
 60 \ 416673 \quad \quad 2,464 \\
 \quad 83333413 \\
 \quad \quad 52084153 \\
 \text{Reste} \quad \quad 8213\frac{1}{3} \text{ Quotients.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32,083333^s \quad | \quad 2,464000 \\
 7 \ 443333 \quad \quad 13,020833^s \\
 \quad 513333 \\
 \quad 5133333 \\
 \quad \quad 2053333 \\
 \quad \quad 20533333 \\
 \quad \quad \quad 8213333 \\
 \quad \quad \quad 8213333 \\
 \text{Reste} \ 8213333^s \ \frac{1}{3} \text{ Divisors.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,464000 \quad | \quad 13,020833^s \\
 2,4640000 \quad \quad 0,1892352 \\
 1 \ 16191670 \\
 \quad 120250060 \\
 \quad \quad 30625630 \\
 \quad \quad \quad 45839640 \\
 \quad \quad \quad \quad 67771410 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 26672450 \\
 \text{Reste} \ 6307840 \ \frac{1}{3} \text{ Quotients.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6,899200 \quad | \quad 0,537600 \\
 1 \ 523200 \quad \quad 12,833333^s \\
 \quad 4480000 \\
 \quad \quad 1792000 \\
 \quad \quad 1792000 \\
 \quad \quad 1792000 \\
 \quad \quad 1792000 \\
 \quad \quad 1792000 \\
 \text{Reste} \ 179200 \ \frac{1}{3} \text{ Divisors.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6,899200 \quad | \quad 12,833333^s \\
 6 \ 8992000 \quad \quad 0,5376 \\
 \quad 48253350 \\
 \quad \quad 97533510 \\
 \quad \quad \quad 77001790 \\
 \text{Reste} \ 17920 \ \frac{1}{3} \text{ Quotients.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4,400000 \quad | \quad 0,921600 \\
 7 \ 136000 \quad \quad 4,774305^s \\
 \quad 6848000 \\
 \quad \quad 3968000 \\
 \quad \quad \quad 2816000 \\
 \quad \quad \quad 512000 \\
 \quad \quad \quad 5120000 \\
 \text{Reste} \ 512000 \ \frac{1}{5} \text{ des Divisors.}
 \end{array}$$

Da die 4 andern Divisionen regelmässig sind, so wird die Gleichförmigkeit für die 12 Divisionen festgesetzt.

Indem ich diesen langweiligen Gegenstand verlasse, werde ich nicht ermangeln, den Gang der Berechnung zu beobachten, in den Divisionen die ich in der Folge werde genöthiget seyn zu machen.

Und weil ich schon den Einfluss des Elementes in den Oberflächen der Dreyecke gezeigt habe, so werde ich trachten, darzu-
thun, dass dieser Einfluss nicht weniger groß in allen übrigen Theilen der Dreyecke ist: folglich erstens:

Von der Hypothenuse.

Diese Seite des rechtwinekligen Dreyeckes kann unter einem dreyfachen Gesichtspuncte betrachtet werden. 1. Als Hypothenuse. 2. Als einfache Seite oder Grundlinie eines Dreyeckes. 3. Als Durchmesser des Zirkels der dem Dreyecke, dessen sie einen Theil ausmacht, umschrieben ist.

Als Hypothenuse hat sie einen großen Ruhm erlangt, durch das bekannte Theorem des berühmten Pythagoras; man weiß aus der Geschichte, daß dieser berühmte Geometer den Musen für die Entdeckung seines Theorems ein Dankopfer brachte: wenn er im Tempel der Berechnung geopfert hätte, so hätte das Orakel ihm antworten können: Pythagoras, du hast dich um die Meßkunst wohl verdient gemacht, allein du hast den Einfluß meines zweyten Elementes mißkannt.

Und wirklich befand sich durch den Einfluß des 2ten Elementes noch etwas Verborgenes in dem Theoreme des Pythagoras, nämlich das doppelte Product der beyden Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit dem Cosinus des zwischen diesen Seiten eingeschlossenen Winkels; Cosinus, der im rechtwinkeligen Dreyecke gleich 0, gleich dem 2ten Elemente ist.

Wenn Pythagoras diesen Einfluß gekannt hätte, so hätte er sein Theorem nicht als Theorem, sondern als Corollarium eines jetzt bekannten allgemeinen Theorems für alle Dreyecke gegeben, nämlich folgendes:

In jedem $\triangle S^a = S^b + S^c \pm \text{doppelt Prod.} \times \text{Cos.}^{\text{einges. Wink.}}$

Das heißt: *das Quadrat jeder Seite ist gleich der Summe der Quadraten der beyden übrigen mehr oder weniger ihrem doppelten Product, multiplicirt mit dem Cosinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.*

Mehr: Wenn der eingeschlossene Winkel stumpf,

Weniger: Wenn er spitzig ist.

So zwar, daß im Theoreme des Pythagoras die Hypothenuse nicht, als irgend ein besonderes Vorrecht genießend, betrachtet werden soll, sondern bloß als Seite eines Dreyeckes, die den nämlichen Gesetzen, wie die übrigen Seiten, unterworfen ist.

Und wenn man Schwierigkeiten findet, die übrigen Seiten unter die nämlichen Gesetze, die der Hypothenuse zugehören, zu reihen, so kömmt diess, weil man den Einfluß der Elemente auf sie nicht erforscht hat.

Ein treffendes Beyspiel dieser Wahrheit findet sich in folgender Formel:

$$\Delta h^2 = \text{Product}^3 \text{ der } 3 \text{ Seiten } \div \text{Sinus} \text{ auf } h$$

Das heist: *In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die senkrechte auf die Hypothenuse.*

Es ist in dieser Formel, daß sie wirkt, als mit sich selbst multiplicirte Seite und dividirt durch den Sinus des ihr gegenüber stehenden Winkels, das heist, durch das Element.

Sie wirkt als Seite, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels: *indem in jedem Dreyecke, jede Seite multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, gleich ist dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die senkrechte auf die erste Seite.*

So wie auch *in jedem Dreyecke: das Quadrat jeder Seite, dividirt durch den Sinus des ihr gegenüber stehenden Winkels, gleich ist dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die senkrechte auf die erste Seite.*

Ueberhaupt hat die Berechnung dem rechtwinkligen Dreyecke kein anderes besonderes Vorrecht gegeben, als daß der Sinus und der Cosinus des der Hypothenuse gegenüber stehenden Winkels ihre Elemente sind, und die zahlreichen Formeln, die sich in der Formelliste befinden, und die ausschliesslich den rechtwinkligen Dreyecken zugeeignet werden, können alle den Dreyecken im allgemeinen angewendet werden, so bald man den Einfluß der Elemente auf die Hypothenuse wird erforschen können.

Welches nicht schwer ist nach den Beyspielen, die ich vorher gegeben habe, und nach Vergleichung der verschiedenen Formeln über die rechtwinkligen Dreyecke mit den nicht rechtwinkligen.

Und weil also die Hypothenuse als eine einfache Seite angesehen werden kann, so kann ich mich enthalten von den übrigen Seiten des Dreyeckes in's besondere zu reden; indem ich mich auf die Formeln, die sie bestimmen, beziehe, komme ich auf den

Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels.

Ich habe vor mir eine Elementar-Geometrie*), die geschätzt wird, und es wundert mich, darin nichts zu finden, welches den Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels betrifft; mir scheint dennoch, daß er ein wichtiger Theil derselben ist; und um sich davon zu überzeugen, soll man nur einen Blick auf die ihm betreffenden Formeln werfen; es ist in der Elementar Geometrie um eine Data mehr, und nicht die unwichtigste; indem er in unmittelbarem Verhältnisse ist, nicht allein mit allen Theilen des Dreyeckes, mit deren Summen, Producten und Differenzen, sondern auch mit allen trigonometrischen Linien und alles, was von derselben abhängt, um desto mehr, weil er einer dieser Linien, nämlich der Secante, gleich ist.

Es wäre unnöthig zu antworten, daß in dem trigonometrischen Theile der Halbmesser des Bogens immer als gegeben eintritt, daher immer bekannt ist, und folglich auch der Durchmesser: weil hier nicht die Rede von dem Durchmesser des Bogens ist, sondern von dem Durchmesser des jedem Dreyecke umschriebenen Zirkels, der fast immer verschieden ist von dem Durchmesser des Bogens, dessen Sehne zu gleicher Zeit die Seite eines Dreyeckes ist.

Ein Beyspiel wird dieß erläutern: sey das Dreyeck ACE , dessen Halbmesser Cq die Sehne AE , so wie den Bogen AqE in gleiche Theile schneidet: es seyen die Linien Av und Ev senkrechte auf die Endpunkte der Halbmesser AC und EC .

Man wird in diesem Dreyecke ACE , wie in jedem andern so gebildeten Dreyecke folgende Proportion haben: *der Sinus eines doppelten Bogens verhält sich zum Sinus eines einfachen Bogens, wie der Durchmesser des Bogens zum Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels.* Daher

$$\begin{array}{ccccc} \frac{ACE}{\text{Sin.}} & : & \frac{ACq}{\text{Sin.}} = \text{Bogens } AqE & : & \frac{\odot AEC}{D} \\ 0,96 & : & 0,6 = 25 & : & 15,625 \end{array}$$

Folglich ist der Durchmesser des dem Dreyecke AEC umschriebenen Zirkels gleich 15,625, obschon der Durchmesser des Bogens gleich 25 ist. Man mache die nämlichen analogen Voraussetzungen beym Dreyecke ADC , so wird man diese Proportion haben.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{ACD}{\text{Sin.}} & : & \frac{DCV}{\text{Sin.}} & : : & \frac{\text{Bogen } DVA}{D} & : & \frac{\odot ADC}{D} \\ 0,96 & : & 0,8 & : : & 25 & : & 20,83^s \end{array}$$

Folglich ist der Durchmesser des dem Dreyecke ADC umschriebenen Zirkels gleich $20,83^s$.

Ebenfalls im Dreyecke FAC wird man diese Proportion haben.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{FCA}{\text{Sin.}} & : & \frac{CFQ}{\text{Sin.}} & : : & \frac{\text{Bogens } D}{D} & : & \frac{\odot FAC}{D} \\ 0,5376 & : & 0,28 & : : & 25 & : & 13,02083^s \end{array}$$

Folglich ist der Durchmesser des dem Dreyecke FCA umschriebenen Zirkels gleich $13,02083^s$.

Es wäre überflüssig zu bemerken, daß man bey der Nachrechnung dieser Proportionen nicht vergessen soll, die Neuntel für die mit einer Reihe endigenden Zahlen zu addiren.

Wenn man nun bemerket, daß in jedem Dreyecke die Secante eines einfachen Bogens oder Winkels gleich ist dem Durchmesser des Zirkels, der dem Dreyecke umschrieben ist, so aus zwey Halbmessern und aus der Sehne eines doppelten Bogens gebildet wird; so wird man daraus schliessen, daß die Secante des Winkels ACq und des Bogens $Aq = 15,625$; die Secante des Winkels DCV und des Bogens $DV = 20,83^s$; daß die Secante des Winkels FCQ und des Bogens $FQ = 13,02083^s$ ist; man wird daraus schliessen, daß $VC = 15,625$, daß $bc = 20,83^s$ daß $\Psi C = 13,02083^s$, weil diese Linien Secanten dieser Winkel und Bogen sind.

Und so wird man eine erste Probe von dem Nutzen des Durchmessers des umschriebenen Zirkels haben.

Um die Secante der Hälfte des Winkels FLe zu haben: weil das Dreyeck FLe gleichschenkelig ist, so kann ich eine beliebige Seite durch den Sinus des ihr gegenüberstehenden Winkels dividiren, und der Quotient wird mir die Secante der Hälfte des Winkels FLe geben, und folglich den Durchmesser des dem Dreyecke FLe umschriebenen Zirkels; wie man es in folgenden Operationen sieht; wovon ich die Division, wie vorher gesagt worden, aufsetzen werde.

1) Ich dividire $Fe = 2,56^s$ durch den Sinus ihres gegenüber stehenden Winkels $= 0,5376$

| | | | |
|-----------|-----------------------|------------------|-----------------------------|
| <i>Fe</i> | 2,566666 ^s | <i>Sinus FLe</i> | 0,537600 |
| | 4162666 | | 4,774305 ^s |
| | 3994666 | | |
| | 2314666 | | |
| | 1642666 | | |
| | 298666 | | |
| | 2986666 | | |
| Reste | 2986666 | | $\frac{5}{9}$ des Divisors. |

2) Ich dividire $Le = 4,583^s$ durch den Sinus ihres gegenüber stehenden Winkels $= 0,96$

| | | | |
|-----------|-----------------------|------------------|-----------------------------|
| <i>Le</i> | 4,583333 ^s | <i>Sinus LFe</i> | 0,960000 |
| | 7433333 | | 4,774305 ^s |
| | 7133333 | | |
| | 4133333 | | |
| | 2933333 | | |
| | 533333 | | |
| | 5333333 | | |
| Reste | 5333333 ^s | | $\frac{5}{9}$ des Divisors. |

Man sieht daher durch diese beyden Operationen, daß der Durchmesser des dem Dreyecke FLe umschriebenen Zirkels $= 4,77305^s$, und folglich, daß auch die Secante der Hälfte des Winkels $FLe = 4,774305^s$ ist.

Man sieht auch, daß diese Divisionsart genau das Ende der Divisionen anzeigt, welche übrigens den Regeln, so die Berechnung für die unendlichen Reihen festgesetzt hat, gemäß sind.

Endlich sieht man, daß man neben die Divisionstheile keine Nullenstellen darf, sondern daß man die Ziffern der Reihe herunter lassen soll; denn obschon die 0 Element ist, und die Verrichtungen einer Zahl macht, so übt sie bloß die Verrichtungen, welche allen Zahlen gemein sind, aus; denn die Berechnung hat keine Ursache fest gesetzt, warum die 0 was immer für eine besondere Verrichtung machen sollte, die 0 vermehrt die Divisionstheile der Decimalbrüche nur als unendliche Reihe von Nullen, welche einem adäquaten Dividendus zur

Seite gesetzt werden; allein die Anzahl der aus bloß ganzen Zahlen bestehenden Dividenden ist nicht gröfser, als diejenige, die zugleich Brüche hat; folglich u. s. w.

Wenn man öfters in den Divisionen die Nullen herunter läßt, so kömmt dieß, weil man sie der Berechnung zuwider gebraucht hat, weil man entweder mißkannt hat, daß die Reihen allen Zahlen gemein sind, oder weil man sie nicht der Meinung oder dem Willen der Berechnung gemäß angewendet hat.

Ueberhaupt hat jedes als Zahl gebrauchte Element nicht mehr und nicht weniger Verrichtungen als die übrigen Zahlen; bloß den zusammen gesetzten Elementen scheinen besondere Verrichtungen, wovon ich in der Folge reden werde, vorbehalten zu seyn; Verrichtungen, die dergestalt geeignet sind, daß ihr bloßer Ausdruck denjenigen, die sie ohne Beweis anführen würden, als einen Phantasten bezeichnen würde, so sehr scheinen sie den allgemeinen und Elementar-Kenntnissen der Mathematik zuwider zu seyn, und das Kennzeichen einer offenbaren Unmöglichkeit mit sich zu führen; doch davon weiter unten. Jetzt

Von dem Durchmesser des dem Dreyecke eingeschriebenen Zirkels.

In der oben genannten Elementar-Geometrie habe ich ebenfalls nichts gefunden, was den Durchmesser des dem Dreyecke eingeschriebenen Zirkels bestimmt.

In einer Auflage von 1778 der *recreations mathématiques et physiques* von Herrn Ozanam, vermehrt und ausgearbeitet von Herrn C. G. F., gedruckt zu Paris, rue Dauphine bey C. L. Ant. Jombert fils aîné, findet man im ersten Theile ein merkwürdiges Problem, welches aus den drey Seiten eines Dreyeckes die Oberfläche desselben und den Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels ohne Hülfe der Senkrechte auf eine Seite bestimmt.

Das Problem lautet so:

Man nehme die halbe Summe der drey Seiten des Dreyeckes, und subtrahire von dieser halben Summe jede dieser drey Seiten, so wird man drey Ueberreste bekommen, die, wenn man sie mit einander, und das Product mit dieser halben Summe multiplicirt, ein neues Product ge-

geben werden, dessen Quadratwurzel gleich der Oberfläche des Dreyeckes seyn wird.

Um den Halbmesser des dem Dreyecke eingeschriebenen Zirkels zu haben, dividire man das Product dieser drey Ueberreste durch die halbe Summe der drey Seiten; die Quadratwurzel des Quotienten wird der Halbmesser des eingeschriebenen Zirkels seyn.

Die Merkwürdigkeit dieses doppelten Problems hat mir Anlaß gegeben, selbige auf das dabey gegebene Dreyeck anzuwenden, und selbst das Dreyeck ausführlich zu bestimmen.

Ich würde hier den gerathenen Erfolg meiner Arbeit vortragen, wenn ich mir nicht vorgenommen hätte, von der angenommenen Figur nicht abzugehen; indem das Dreyeck dieses Problems keinen der Werthe der in der Figur befindlichen Dreyecke haben kann.

Allein ich werde, was das Nähmliche ist, diese Arbeit auf die Figur im Dreyecke *FLe* anwenden, weil es aus Seiten, die mit Reihen endigen, ganz gebildet wird.

Ich werde daher im Dreyecke *FLe* bestimmen: 1) die Oberfläche mittelst den drey im Probleme angeführten Seiten.

2) Den Durchmesser des umschriebenen Zirkels durch die Formel:

$$\overset{\textcircled{D}}{D} = \text{Product} \overset{3S}{\Delta} 2 \text{ Oberfl.}$$

3) Die Sinusse der Winkel durch die Formel:

$$\overset{\text{ü. w.}}{\text{Sin.}} = S \Delta \overset{\textcircled{D}}{D}$$

4) Die Senkrechte mittelst der Formel:

$$\overset{\text{auf S. 1}}{\text{Senkr.}} = S^2 \times \overset{\text{w. auf S. 1}}{\text{Sin.}}$$

5) Den Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels mittelst folgender Formel:

$$\overset{\textcircled{D}}{D} = \overset{\text{auf S. 3. Verläng.}}{\perp} \times \overset{\text{ü. w.}}{\text{Sin.}} \Delta \overset{3 \text{ Sin.}}{\frac{1}{2} \text{ Sum.}}$$

Die Seite *LF* = 4,583^s *Le* = 4,583^s *Fe* = 2,566^s, folglich die Summe der Seite = 11,733^s, folglich die halbe Summe = 5,866^s.

Die halbe Summe schreibe ich drey Mahl:

ich subtrahire jede Seite

$$\begin{array}{r} 5,866^s \\ 4,583^s \\ \hline 1,283^s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,866^s \\ 4,583^s \\ \hline 1,283^s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,866^s \\ 2,566^s \\ \hline 3,000 \end{array}$$

ich multiplicire den Rest

$$\begin{array}{r} 1,283^s \\ 3849 \\ 10264 \\ 2566 \\ 1283 \end{array}$$

für $\frac{2}{3}$ addit.

$$\begin{array}{r} 8555^s \\ 1,6469445 \end{array}$$

dritter Rest

$$\begin{array}{r} 3,3 \\ 49408335^s \\ 49408335 \end{array}$$

für $\frac{5}{9}$ addit.

$$1822^s$$

schneide ab die $\frac{1}{1000000}$
multiplicire mit $\frac{1}{2}$ Summe .

$$\begin{array}{r} 54349170322^s \\ 5864^s \end{array}$$

$$32609502$$

$$32609502$$

$$43479336$$

$$27174785$$

für $\frac{2}{3}$ addit.

$$\begin{array}{l} (1811639 \\ (1811639 \end{array}$$

Schneide ab die $\frac{1}{1000000}$

$$31884846400$$

5,646666^s = Oberfläche, indem ich mir die Anmerkungen über die Ausziehung vorbehalte, werde ich bloß erinnern, daß ich ohne die Addirung der Neuntel kein richtiges Resultat würde bekommen haben.

$$5$$

$$5$$

$$25$$

$$688$$

$$106$$

$$636^6$$

$$5248$$

$$1124$$

$$4496^4$$

$$75246$$

$$11286$$

$$67716^6$$

$$753000$$

$$112926$$

$$677556^6$$

$$7544400$$

$$1129326$$

$$6775956^6$$

$$76844400$$

Man sieht folglich, daß die Oberfläche richtig ist, weil die Senkrechte auf $Fe = PF = 4,4$.

Jetzt suche ich den Durchmesser des dem Dreyecke LF umschriebenen Zirkels, der in allen Dreyecken gleich ist dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die doppelte Oberfläche.

$$\text{Seite } LF = 4,583^s$$

$$\text{Seite } LE = 4,583^s$$

$$\begin{array}{r} 13749 \\ 36664 \\ 22915 \\ 18332 \end{array}$$

$$\text{für } \frac{2}{3} \text{ addit.} \quad \begin{array}{r} (15277^s \\ (15277^s \end{array}$$

$$\text{Seite } Fe = \quad \begin{array}{r} 21,0069445^s \\ 2,566^s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1260416670 \\ 1260416670 \\ 1050347225 \\ 420138890 \end{array}$$

$$\text{für } \frac{6}{9} \text{ addit.} \quad \begin{array}{r} (70023148 \\ (70023148 \end{array}$$

$$\text{für } \frac{5}{9} \text{ addit.} \quad \begin{array}{r} 14255^s \end{array}$$

doppelte Oberfläche

$$53,917824 | 35915^s$$

$$| 11,293333^s$$

$$87444920$$

$$4,774305 | 68$$

$$83915890$$

⊙
D

$$48625590$$

$$34522580$$

$$6425810$$

$$64258100$$

$$77914350$$

$$101543520$$

$$111968560$$

Man weiß, daß der Durchmesser, den ich suche $= 4,774305^s$, und man sieht, daß der Quotient mir diese Summe mit einem geringen Ueberschusse gibt; ich glaube dennoch nicht in der Operation gefehlt zu haben; es müßte nur geschehen seyn, weil ich in dem ersten Producte die Zehnmillion-Theile nicht abgeschnitten habe, welches mir einen geringen Ueberschuß in dem zweyten Producte gegeben hat; und welches auf das Endresultat kann Einfluß gehabt haben; übrigens kann dieser Ueberrest vernachlässiget werden, weil es Zehnmillion-Theile sind.

Allein ich werde das erste Product wieder vornehmen, und operiren nachdem ich die Zehnmillion-Theile abgeschnitten habe.

$$\begin{array}{r}
 21,006944 \mid 5^s \\
 \underline{2,566^s} \\
 126041664 \\
 126041664 \\
 105034720 \\
 42013888 \\
 \underline{700231466^s} \\
 700231466^s \\
 \hline
 53,917822 \mid 93333^s \quad \mid 11,293333^s \\
 87444900 \\
 83915690 \\
 48623590 \\
 34502580 \\
 6225810 \\
 62258100 \\
 57914350 \\
 \text{Rest} \quad . \quad . \quad . \quad 1447685
 \end{array}$$

Folglich sieht man hier, daß die Reihe von 5^s sich durch zwey Ziffern ausgedruckt hat, welches hinlänglich ist. Bemer-

ke übrigens, daß, wenn man in dieser Division statt den Nullen die abgeschnittenen Zehnmillion-Theile herab läßt, so wird man 4,7743055|9 haben. Ich habe auch mehrmahls bemerkt, daß in den, durch den Zusammenfluß mehrerer Reihen, schweren und verwickelten Operationen die Berechnung die Reihe des End-Resultates nur durch zwey oder drey Ziffern der Reihe ausdrückt.

Was ich eben gesagt habe, ist keine Meinung, sondern bloße Bemerkungen, die ich den Mathematikern unterwerfe.

Ich weiß auch, daß dieses von keinem großen Nutzen in der Praxis seyn kann, wo man fast alle Decimalen vernachlässigt; allein in der Theorie ist es wichtig, die verborgensten Gänge der Berechnung, so viel möglich, zu kennen: folglich, da ich den Durchmesser des umschriebenen Zirkels gefunden habe, suche ich den Sinus jedes Winkels; *Sinus, der immer gleich ist der gegenüber stehenden Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.*

Ich suche zuerst die Sinusse der den gleichen Linien gegen über stehenden Winkel.

Man sieht aus den nebenstehenden Operationen, daß die Quotienten genau die Sinusse angeben, und daß die Divisionen den vorher erwähnten Regeln gemäß sind.

$$\begin{array}{r} 4,583333^s \\ 45833333 \\ 28645883 \\ \hline \text{Reste } 533\frac{1}{3} \text{ des Quotienten.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,566666^s \\ 2,5666666 \\ 17951416 \\ 36285016 \\ 28648816 \\ \hline 29866\frac{2}{3} \text{ des Quotient.} \end{array}$$

Ich suche nun die Senkrechte auf eine der Seiten, zum Beyspiele auf *Fe*; indem ich eine der übrigen Seiten, zum Beyspiele *FL*, mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, folglich mit 0,96 multiplicire; und ich werde 4,4 für die Senkrechte auf *Fe* haben, wie man hier neben sieht.

$$\begin{array}{r} LF \ 4,583^s \\ 0,96^*) \\ \hline 27498 \\ 41247 \\ \hline \frac{1}{3} \text{ des Multipliers } 32 \\ \hline \perp \text{ auf } Le \ . \ 4,40000 \end{array}$$

Ich suche nun den Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels mittelst folgender Proportion.

$$\frac{\triangle D}{\triangle D} : \frac{\perp \text{ auf } S}{\text{Sin.}} = \frac{S \text{ gegen über.}}{\frac{1}{2} \text{ Sin.}} = \frac{3 \text{ Sin.}}{\frac{1}{2} \text{ Sum.}}$$

folglich (weil die drey Sinusse respective gleich sind 0,96 + 0,96 + 0,5376; so ist ihre Summe = 2,4576 und ihre halbe Summe = 1,2288: folglich in Zahlen.

$$\begin{array}{r} \triangle D \quad \perp \text{ auf } Fe \quad \text{Sin. } FLe \quad \frac{1}{2} \text{ Sum. } 3 \text{ Sin.} \\ 4,4 \quad 0,5376 \quad 1,2288 \\ \hline 21504 \end{array}$$

Folglich ist der Durchmesser des dem Dreyecke *FLe* eingeschriebenen Zirkels = 1,925.

$$\begin{array}{r} 21504 \\ 2,365440 \\ 11366400 \\ 3072000 \\ 6144000 \\ 000000 \end{array}$$

*) Des Sinus 0,96 ist der Sinus des der Senkrechte auf *Fe* gegenüber stehenden Winkels.

Denn, wenn man diesen Durchmesser durch die im vorerwähnten Problem gegebene Methode sucht, und man das Product der drey Ueberreste durch die halbe Summe der drey Seiten dividirt, so wird die Quadratwurzel des Quotienten den Halbmesser des nämlichen eingeschriebenen Zirkels geben: wie es aus folgender Operation erhellet.

| | | |
|--|---|---|
| $ \begin{array}{r} 5,434917 \quad \quad 5,866666^s \\ 5\,4349170 \quad 0,926406 4 \\ 15491760 \quad 1164 \\ \hline 37584280 \quad 186 \\ 23842840 \quad 1116 \quad 6 \\ \hline 37617600 \quad 4806 \\ 24176040 \quad 1922 \\ 709376 \quad 3844^2 \\ \hline 96200 \\ 19244 \\ 769764 \\ \hline 1922400 \\ 192489 \\ 17324019 \end{array} $ | <p style="text-align: right;">Halbmesser des Δ</p> $ \begin{array}{r} \quad 0,962499^s \\ \hline 1924998 \\ \hline 1,925000 \quad D \text{ des } \Delta \end{array} $ | <p style="text-align: center;">für $\frac{2}{3}$ ad $\cdot 2$</p> |
|--|---|---|

Man sieht folglich, daß diese Zusammensetzungen, obschon sie sehr verschieden sind, die nämlichen Resultate hervor bringen, nämlich den Durchmesser des dem Drey-ecke *FLe* eingeschriebenen Zirkels.

Man sieht die Bestätigung, daß die Berechnung die Reihe nur durch zwey Ziffern öfters ausdrückt.

Und dieses hat hier nichts Sonderbares, wegen den Abzug der Zehnmillion-Theile; denn wenn man nur die vier Zehnmillion-Theile, die von dem Quotienten der Division abgeschnitten sind, beybehält, und man sie auf den Ausziehungsrest herab läßt, so wird die Wurzel sich ohne Reihe ausdrücken, wie man es in folgender Ausziehung sieht.

$$\begin{array}{r}
 1,925000 \\
 1,925000 \\
 1,925000 \\
 1,925000 \\
 1,925000
 \end{array}$$

*) Der Rest 0,000000 ist der Rest des der Schrift auf $\frac{2}{3}$ gegenüber stehenden Winkels.

$$\begin{array}{r}
 0,9264064 \quad | \quad 0,9625 \\
 \begin{array}{r}
 819 \\
 \hline
 1164 \\
 1866 \\
 \hline
 1116 \\
 4806 \\
 1922 \\
 \hline
 3844^2 \\
 96240 \\
 192455 \\
 \hline
 96225 \\
 \hline
 0001500
 \end{array}
 \end{array}$$

Von dem Sinus versus.

In dem trigonometrischen Theile der Elementar-Geometrie, wovon ich geredet habe, erwähnt man nur des Sinus versus, um ihn durch bloßes Zeigen in der Figur bekannt zu machen, als ob er ohne Einfluß im Elementartheile wäre, und es sich daher nicht die Mühe lohnte, eine Methode anzugeben, um ihn zu bestimmen, verschieden von derjenigen, die ihn als die Seite eines rechtwinkligen Dreyeckes bestimmt; zwar wird er öfters so klein, daß er der Aufmerksamkeit nicht würdig zu seyn scheint; allein man vermeidet eben deswegen sich seiner zu bemühen, weil, da er so klein geworden, er gewöhnlich zum Resultate des Productes der beyden so genannten irrationellen Quadratwurzeln wird, die, wie man behauptet, nicht leicht zu bestimmen sind.

Die unverdiente Vernachlässigung, in der sich der Sinus versus befindet, kömmt nicht aus Mangel der Gerechtigkeit seiner Sache, noch des Ansehens, auf dem er gerechte Ansprüche hat; sondern von der übel verstandenen Gefahr, so einige Geometer glauben könnten, bey der Richtigkeit ihrer Operationen zu laufen, wenn sie seinen Werth nach den Elementar-Grundsätzen der Geometrie bestimmten.

Dennoch kann der Sinus versus als trigonometrische Linie nicht den übrigen Seiten des einfachen Dreyeckes gleich geachtet werden, weil die Berechnung ihn durch besondere Vorzüge ausgezeichnet

hat, da sie ihn mit Vorthail bey Operationen eines höheren Interesse anwendete.

Und wirklich soll man nur einen Blick auf die in den Formeln, so ihn betreffen, enthaltenen Vorzüge werfen, um des Gesagten überzeugt zu seyn.

Ja man wird sogar in der Folge sehen, daß das erste Element, indem es ihm die gebührende Gerechtigkeit widerfahren läßt, mit Hülfe des zweyten Elementes ihn der Vernachlässigung entziehen wird, in welche er verborgen zu liegen scheint.

Unterdessen werde ich beweisen, daß die Gefahr, so die Geometer glauben könnten bey der Richtigkeit ihrer Operationen zu laufen, übel verstanden ist, und daß keine Gefahr vorhanden sey.

Man nehme das Dreyeck ACQ , das aus den zwey Halbmessern AC und QC und der Sehne AQ gebildet wird.

Man hat schon vorher gesehen, daß der Halbmesser QC die Sehne FA und den Bogen FQA in zwey gleiche Theile schneidet: folglich ist As der Sinus des Bogens QA ; folglich Qs der Sinus versus des nämlichen Bogens; und weil $FA=7$ und $Cs=12$, so ist $sA=3,5$ und $Qs=0,5$; und weil das Dreyeck AQs rechtwinkelig ist, so wird man haben: $QA^2 = Qs^2 + sA^2$ oder $QA^2 = 0,5^2 + 3,5^2 = 0,25 + 12,25 = 12,5$: man wird daher diese Proportionen haben:

| | | | | | | |
|--------|---|-------|--|--------|--|---------|
| QA^2 | : | QsA | | Qs^2 | | QAs |
| 12,5 | | Sin. | | 0,25 | | Sin. |
| | | 1 | | | | 0,02 |
| QA | | QsA | | Qs | | QAs |
| 3,5355 | | Sin. | | 0,5 | | Sin. |
| | | 1 | | | | 0,14142 |

Folglich muß der Sinus versus Qs , der 0,5 ist, gleich seyn $3,5355 \times 0,14142$, wie die Multiplication zeigt.

Man sieht daraus, daß die Reihe von 9^s sich durch vier Ziffern ausdrückt, welches hinlänglich ist, um sie zu erkennen, und wenn man sie durch eine bestimmte Anzahl von gernausgedrückt haben wollte, so soll man bloß mit der Ausziehung der Quadratwurzeln der Factoren fortfahren, und man würde

$$\begin{array}{r}
 3,5355 \\
 \times 0,14142 \\
 \hline
 70710 \\
 141420 \\
 35355 \\
 141420 \\
 35355 \\
 \hline
 0,499990410
 \end{array}$$

bis zur Ermüdung befriedigt werden: ohne jedoch jemahls auf 0,5 zu kommen, weil die Berechnung sich geweigert hat, es anders als durch 0,49^s hervor zu bringen, indem sie mathematisch bestimmt hat, daß 0,49^s = 0,50 = 0,5 ist; weil, wenn man die Quadratwurzeln von 0,49^s und von 0,5 auszieht, diese Wurzeln gleich sind; wie vorher gesagt worden, und wie ich es weiter unten zeigen werde.

Man nehme das Dreyeck *AqC* gebildet durch die zwey Halbmesser *CA* und *Cq* und die Sehne *Aq*; weil der Halbmesser *Cq* die Sehne *AE* und den Bogen *AqE* in gleiche Theile schneidet, so wird *Ar* der Sinus und *qr* der Sinus versus des Bogens *Aq* seyn; und weil *Cr* = 10 und *AE* = 15, folglich *Ar* = 7,5 und *rq* = 2,5; und weil das Dreyeck *Aqr* rechtwinkelig ist, so wird man haben: $Aq^2 = Ar^2 + qr^2$ oder $Aq^2 = 7,5^2 + 2,5^2$ oder $Aq^2 = 56,25 + 6,25$: oder $Aq^2 = 62,5$: folglich wird man diese Proportionen haben:

| | | | | | |
|----------|---|--------------------------------|----|--------|--------------------------------|
| AQ^2 | : | $\overset{Arq}{\text{Sin.}^2}$ | :: | qr^2 | $\overset{qAr}{\text{Sin.}^2}$ |
| 62,5 | | 1 | | 6,25 | 0,1 |
| Aq | | $\overset{Arq}{\text{Sin.}}$ | | qr | $\overset{qAr}{\text{Sin.}}$ |
| 7,905694 | | 1 | | 2,5 | 0,316227 |

Daher muß der Sinus versus, der 2,5 ist, gleich seyn

7,905694 × 0,316227

Wie man es in der hier neben stehenden Multiplication sieht, in welcher die Reihe von 9^s sich hinlänglich durch vier ger ausdrückt: folglich das Product = 2,49^s = 2,5 ist, weil die Wurzeln dieser zwey Zahlen gleich sind.

$$\begin{array}{r}
 7,905694 \\
 0,316227 \\
 \hline
 55\ 339858 \\
 158\ 11388 \\
 1581\ 1388 \\
 47434\ 164 \\
 79056\ 94 \\
 2371708\ 2 \\
 \hline
 2,499993\ 896538
 \end{array}$$

Ich habe mich hinlänglich bey dem Sinus versus aufgehalten, und beziehe mich auf die Formeln die ihn betreffen; nur diess werde ich bemerken, daß, da der Winkel, der dem Sinus versus eines einfachen Bogens gegenüber steht, gleich ist der Hälfte des Winkels, der dem Sinus versus eines doppelten Bogens gegenüber steht, und folglich der Winkel, der dem Sinus versus eines einfachen Bogens gegen-

über steht, gleich ist dem dritten Theile der Summe dieser beyden Winkel, so scheint es mir nicht unmöglich, durch die Elementar-Geometrie die Trisection des Winkels zu finden.

Dieß ist vielleicht nur eine Vermuthung, weil ich es aus Mangel an Zeit nicht versucht habe, ich werde aber trachten, es in der Folge zu thun.

Denn einen Winkel in drey Theile schneiden, ist nichts anders, als ihn desgestalt theilen, daß der Winkel seines kleineren Theiles dem Sinus versus eines einfachen Bogens gegenüber stehe, und der Winkel seines größeren Theiles dem Sinus versus eines doppelten Bogens.

Von der Extrasecante und von der Hypothenuse der Sinusse.

Alle trigonometrischen Linien haben von den Geometern ihre Benennung erhalten: ich begreife nicht, warum die Extrasecante und die Hypothenuse der Sinusse davon ausgenommen worden sind: wenigstens sagt die Elementar-Geometrie, wovon ich geredet habe, kein Wort davon; jedoch, obschon sie mir in der Trigonometrie wichtig scheinen, so sind sie es dennoch nicht so sehr, als der Sinus versus.

Denn weil der Halbmesser gewöhnlich gegeben ist; so kann man mittelst des Sinus versus und des Halbmessers alle übrige trigonometrische Linien bestimmen.

Ich werde dieses beweisen, nachdem ich werde gesagt haben, was ich unter *Extrasecante* und *Hypothenuse der Sinusse* verstehe.

Unter *Extrasecante* verstehe ich denjenigen Theil der Secante, der ausserhalb des Zirkels ist: also vq , bV , ΨF werden *respective* die Extrasecanten der Bogen Aq , DV und FQ seyn; weil bC , vC und ΨC *respective* die Secanten der nämlichen Bogen sind.

Unter *Hypothenuse der Sinusse* verstehe ich die Hypothenuse des rechtwinkeligen Dreyeckes, dessen beyde Catheden *respective* der Sinus und der Sinus versus eines Bogens oder Winkels sind, und als solche hat sie das Vorrecht vor den anderen Hypothenusen, daß sie mittelst des Sinus versus und des Halbmessers bestimmt werden kann.

Die Sehnen Aq , VD , und FQ werden *respective* Hypothenusen der

Sinusse der Bogen Aq , VD und FQ seyn, so wie der Winkel ACq VCD und FCQ .

Sey QC der Halbmesser des Bogens $Aq = 12,5$, und qr der Sinus versus des nämlichen Bogens $= 2,5$. Weil in jedem Dreyecke die Extrasecante gleich ist dem Sinus versus, multiplicirt mit dem Halbmesser, dividirt durch den Cosinus, so wird man im Dreyecke ACq folgende Proportion haben:

| Extrasec. | | Sin.v. | | R | | Cos. |
|-----------|---|--------|----|------|---|------|
| eq | : | qr | :: | qC | : | rC |
| 3,125 | | 2,5 | | 12,5 | | 10 |

Folglich ist die Extrasecante $eq = 3,125$. Daher ist die Secante $eC = 15,625 = R^2 \Delta \text{Cos} =$ dem Durchmesser des dem Dreyecke ACE umschriebenen Zirkels.

Wenn man analoge Voraussetzungen für das Dreyeck DVC macht, so wird man folgende Proportion haben:

| Extrasec. | | Sin.v. | | R | | Cos. |
|-------------------|---|--------|----|------|---|------|
| bV | : | Vy | :: | VC | : | yC |
| 8,33 ^s | | 5 | | 12,5 | | 7,5 |

Folglich ist die Extrasecante $bV = 8,33^s$, daher ist die Secante $bC = 20,83^s = R^2 \Delta \text{Cos} =$ dem Durchmesser des dem Dreyecke ADC umschriebenen Zirkels.

Wenn man analoge Voraussetzungen für das Dreyeck QCF macht, so wird man haben:

| Extrasec. | | Sin.v. | | R | | Cos. |
|----------------------|---|--------|----|------|---|------|
| ΨF | : | Qs | :: | QC | : | Cs |
| 0,52083 ^s | | 0,5 | | 12,5 | | 12 |

Folglich ist die Extrasecante $\Psi F = 0,52083^s$, daher ist die Secante $\Psi C = 13,02083^s = R^2 \Delta \text{Cos} =$ dem Durchmesser des dem Dreyecke FCA umschriebenen Zirkels.

Und weil in jedem Dreyecke das Quadrat der Hypothenuse der Sinusse gleich ist dem Sinus versus, multiplicirt mit dem doppelten Halbmesser, so wird man im Dreyecke ACq folgende Proportion haben:

| | | | | | | |
|--------|---|------|---|---------------|---|-----------------|
| Aq^2 | : | qr | : | $qC \times 2$ | : | 1 |
| 62,5 | | 2,5 | | 25 | | $\frac{1}{N} 2$ |

folglich ist das Quadrat der Hypothenuse (der Sinusse) $Aq^2 = 62,5$, und $Aq = 7,905694$, wie man vorher gesehen hat:

Im Dreyecke DVC wird man haben:

$$\begin{array}{ccccccc} VD^2 & : & Vy & : & : & VC \times 2 & : & 1 \\ 125 & : & 5 & : & : & 25 & : & 1 \end{array}$$

Folglich ist das Quadrat der Hypothenuse (der Sinusse) $VD^2 = 125$, und man wird weiter sehen, daß $VD = 11,18$ ist.

Im Dreyecke QCF wird man haben:

$$\begin{array}{ccccccc} FQ^2 & : & Qs & : & : & FC \times 2 & : & 1 \\ 12,5 & : & 0,5 & : & : & 25 & : & 1 \end{array}$$

Folglich ist das Quadrat der Hypothenuse (der Sinusse) $FQ^2 = 12,5$, und man hat schon eine vorläufige Probe gehabt, daß ihre Wurzel $= 3,5355$ ist.

Nachdem man mittelst des Sinus versus die Secante und die Hypothenuse der Sinusse bestimmt hat, wird es leicht, alle übrige trigonometrische Linien zu bestimmen.

Man sieht daraus, daß der Sinus versus nicht verdiente, in der Anzahl der gemeinen Linien versetzt zu werden, weil er mit besonderen Vorzügen versehen worden.

Man sieht ebenfalls, daß die Extrasecante, und die Hypothenuse der Sinusse, so wie die übrigen trigonometrischen Linien, eine besondere Benennung verdienen.

Und weil alles, besonders in der Trigonometrie, wichtig ist, so gibt es noch eine andere Linie, die bestimmt werden könnte, nämlich diejenige, welche vom Halbmesser, oder von der Secante, die sich zwischen dem Sinus eines einfachen Bogens, und zwischen dem Sinus eines doppelten Bogens befindet, ausgehet: das heist, dieser Theil der Secante, der gebildet wird durch den Durchschnitt der Sehne eines einfachen Bogens, mit demjenigen der Sehne eines doppelten Bogens, so ist z. B. rg Theil des Halbmessers qC , und der Secante rC , wie auch sl Theil des Halbmessers QC , welche Theile respective gleich sind der Summe des Sinus versus, und der Extrasecante des Winkels, dem diese Linien zugehören, und welches auch im Allgemeinen für alle diese Theile Statt findet. Daher dieser Satz:

Der Abstand zwischen den beyden Puncten der Durchschnitte, so

NB. Alle jene Buchstaben, die in der Kupfertafel mit lateinischer Schreibschrift stehen, sind hier im Texte mit deutscher Frakturschrift ausgedrückt.

die Secante eines einfachen Bogens auf den Sinus eines doppelten Bogens, und auf den doppelten Sinus eines einfachen Bogens macht, ist gleich der Summe des Sinus versus, und der Extrasecante des einfachen Bogens.

Von der Hypothenuse des rechtwinkligen, gleichschenkeligen Dreyeckes, oder von der Diagonale des Quadrates und ihrem Verhältnisse zur Seite des Quadrates.

Nur mit der größten Behutsamkeit soll ich von einem Gegenstande reden, so die allgemeine Meinung aller Geometer aufser Zweifel und Erörterung gesetzt hat.

Die Unmefsbarkeit der Diagonale des Quadrates, verglichen mit seiner Seite, ist als unwidersprechbarer Grundsatz in dem Elementar-Theile fest gesetzt.

Dennoch bekenne ich, dafs ich es nicht verstehe, und diefs ist nichts Auffallendes, weil ich kein Geometer bin. Der einzige Zweck dieses Werkes war, die Zeit zu verkürzen, die ich vielleicht nützlicher hätte anwenden können.

Nur Unkundige, sagt man, wissen nicht, dafs die Diagonale des Quadrates, mit ihrer Seite verglichen, unmefsbar ist. Es sey, ich setze mich in diese Classe, was die Geometrie betrifft, wenn es mir nur erlaubt ist, mir selbst meine Zweifel vorzulegen, ohne jedoch der öffentlichen Meinung zu nahe treten zu wollen, sondern in der einzigen Absicht, mich zu unterrichten, desto mehr, weil die Wahrheit einzig ist und sie mich daher berechtigt, um sie zu finden, *non jurare in verba magistri*.

Es ist dieses Wort des Horaz, welches die größte Stütze der Wissenschaften ist, und das mich berechtigt, folgende Zweifel vorzutragen.

Ich habe den höchsten Begriff von der Geschicklichkeit der Berechnung gefafst, wenn ich im ersten Theile gesehen, durch wie viele unendliche Combinationen sie zu den nähmlichen Resultaten führet; durch wie viele Combinationen sie zu unterschiedenen Resultaten führet, indem sie immer einen gleichförmigen und analogen Gang beobachtet, der mit ihrer Existenz verbunden zu seyn scheint; alle Gröfsen ohne Ausnahme, sind der Gegenstand ihrer Messungen, arithmetische, geome-

trische, algebraische; alle lassen sich nach einer nähmlichen analogen Norm bestimmen; nur die Ausdrücke sind unterschieden, und diese Ausdrücke sind das Werk der Mathematiker, die immer nach dem Clima und dem Jahrhunderte, worin sie lebten, verschieden sind.

Der geometrische Ausdruck ist der Ausdruck der Berechnung; man sieht die Diagonale des Quadrates mit seiner Seite vereint; man sieht die Länge, so jeder von ihnen einnimmt: diese Länge ist das Werk der Berechnung, und weil man behauptet, daß unser numerisches System jede Gröfse ausdrücken kann; aus welcher Ursache kann man behaupten, daß es die Länge der Diagonale des Quadrates nicht ausdrücken sollte, wenn man annimmt, daß es die Länge seiner Seite angibt, und man diese beyden Längen mit seinen Augen sieht?

Denn ich glaube nicht, daß man behaupten wolle, daß die Berechnung nicht habe bestimmen können, daß die Diagonale des Quadrates, verglichen mit seiner Seite, meßbar sey, weil ich mich sonst auf den ersten Theil berufen müßte: folglich, wenn die Berechnung diese Meßbarkeit hat bestimmen können, hat sie selbe auch bestimmt.

Ja sogar, wenn sie das Maß seiner Seite angegeben hatte, war es unmöglich, daß sie nicht das Maß der Diagonale angab: allein dieß würde zu weit in die Metaphisik eingreifen, wovon ich mich enthalten werde, um zu den Einwürfen, oder vielmehr zu dem Beweggrunde über zu gehen, der die Geometer bewogen hat, diese Unmeßbarkeit anzunehmen.

Das Quadrat der Diagonale, sagt man, ist gleich dem doppelten Quadrate der Seite; folglich, wenn man annimmt, daß die Seite $= 1$ ist; so wird ihr doppeltes Quadrat $= 2$ seyn, nun gibt es keine bekannte Zahl, die mit sich selbst multiplicirt, 2 hervor bringen könne, weil die Quadrate überhaupt nicht mit den Ziffern 2, 3, 7, und 8 endigen können; folglich die Diagonale, multiplicirt mit sich selbst, könnte niemahls 2 hervor bringen: folglich ist sie, mit der Seite verglichen, unmeßbar.

Wenn die Seite des Quadrates $= 0,5$ ist, so ist ihr doppeltes Quadrat auch $= 0,5$, folglich ist das Quadrat der Diagonale auch $= 0,5$, nun gibt es keine Zahl, die, mit sich selbst multiplicirt, 0,5 hervor bringen könne; folglich ist die Diagonale, mit der Seite verglichen, unmeßbar.

Wenn das Quadrat der Seite $= 6,25$, so ist das doppelte Quadrat $= 12,5$, folglich das Quadrat der Diagonale auch $= 12,5$; nun gibt

es keine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt, 12,5, hervor bringen könne, folglich ist die Diagonale, mit der Seite verglichen, unmeßbar; weil überhaupt keine Zahl, mit sich selbst multiplicirt, das doppelte Quadrat einer anderen hervor bringen kann.

*Von den so genannten unvollkommenen Quadraten, und ihren
so genannten irrationellen Wurzeln.*

In diesem Paragraphen wird man trachten, die Gründe zu beantworten, welche die Geometer bewogen haben, die Unmeßbarkeit, wovon ich geredet, anzunehmen.

Es kommt auf folgende Frage an: Gibt es unvollkommene Quadraten, und sind ihre Wurzeln irrationell? die Analogie der Berechnung antwortet: Nein, es gibt keine, und es ist selbst unmöglich, daß es solche gebe.

Ich werde diese Antwort der Analogie vertheidigen, indem ich die Schwierigkeiten, denen ich glauben könnte zu begegnen, aufsuchen werde; und weil mein einziger Zweck ist, die Wahrheit zu kennen, so werde ich selbst diejenigen angeben, die ich nicht würde übersteigen können.

Unter irrationellen Wurzeln verstehe ich diejenigen, deren Ende man nicht erreichen kann, auf welche Anzahl von Ziffern man sie auch fortsetzte, und die, wenn man sie hiernach mit sich selbst multiplicirt, das Quadrat, woraus sie gezogen worden, nicht wieder genau hervor bringen, so zwar, das man mittelst ihrer keine so genaue Resultate hoffen darf, als man sie haben würde, wenn ihre Wurzeln nicht irrationell wären.

Ich glaube, daß diese Definition logisch richtig ist, und die Analogie der Berechnung sagt, daß es keine solche Wurzeln gebe.

Allein, wenn dieß wahr ist, wie werde ich diese Analogie begreifen und fest setzen können? auf die nämliche Weise, als, da man den Gang der Berechnung in den unendbaren Divisionen beobachtet hat, man die Quotienten durch schickliche Verwerfungen der Divisionsreste bestimmt hat, eben so wird man in den unendbaren Ausziehungen die Wurzeln bestimmen können, wenn man den Gang der Berechnung in mehreren dieser Ausziehungen beobachtet, und die Verwerfungen, die sie bey den Ausziehungsresten annimmt.

Daher die Kenntniß der Regel, welche darüber festgesetzt werden könnte, von dieser Frage abhängt: wie benimmt sich die Berechnung, um

schickliche Verwerfungen der Ausziehungsreste zu machen? und um die Wurzeln dergestalt fest zu setzen, daß, wenn man mit ihnen operirt, man genaue Resultate bekömmt? Diese Frage kann auch durch die Vergleichung vieler Resultate beleuchtet, und so die Regel festgesetzt werden.

Man wird gleich sehen, daß ich mit so genannten irrationellen Wurzeln, mehrere genaue Resultate erhalten habe, und wenn es mir nicht wird mit allen gelingen können, so werde ich mich wohl hüten, die Schuld der Analogie zuzuschreiben; ich werde nur meine Unfähigkeit, den analogen Gang der Berechnung zu begreifen, bedauern.

Gang, der vermuthlich nicht so schwer seyn wird zu begreifen, als es der im ersten Theile beobachtete war, wo die Berechnung die Resultate durch solche zusammen gesetzte Combinationen in einigen Formeln bestimmt hat, daß es, glaube ich, schwer wäre, die Ursache davon anzugeben, und ihren Gang auseinander zu setzen, oder zu analysiren; obschon es Analytiker gibt, welche behaupten, daß dieß bey allen Combinationen möglich sey.

Weil die Zeit mir nicht erlaubt, mich über diesen Gegenstand auszu dehnen, werde ich mich begnügen die Einwürfe zu beantworten, ihnen einige der vorhergehenden Resultate, und einige der in der Liste enthaltenen Formeln anzuwenden.

Der erste dieser Einwürfe war: wenn die Seite des Quadrates = 1 ist, so wird ihr doppeltes Quadrat = 2 seyn, und das Quadrat der Diagonale wird auch = 2 seyn; nun gibt es keine Zahl, die, mit sich selbst multiplicirt, 2 hervor bringen kann, folglich ist die Diagonale, mit der Seite verglichen, unmeßbar.

Hier wäre also das doppelte Quadrat des Elementes, mit dem Element verglichen, unmeßbar.

Der Berechnung gehört es, die Vertheidigung ihres Elementes zu übernehmen; ich werde nur beobachten, wie sie die Quadratwurzel ihres doppelten Elementes auszieht.

Man hat schon so oft gesehen, daß es nicht nöthig sey, daß die Wurzel, mit sich selbst multiplicirt, mir 2 gebe, wenn sie mir nur das Gleiche oder das Equivalent von 2 gibt, folglich, wenn sie mir $1,9^5$ gibt, so wird sie mir das Equivalent von 2, so wird sie mir 2 geben, weil man vorher gesehen hat, daß jede Zahl gleich ist sich selbst weniger 1, gefolgt von einer unendlichen Reihe von Neunern.

Und dergestalt drückt sich die Berechnung aus, und bestimmt die Resultate, nicht allein in den Ausziehungen der Quadratwurzeln, sondern auch in den übrigen Operationen.

Hier die Ausziehung: $2 \mid 1,4142135 \text{ u. s. w.}$

Man sieht hier eine dieser Ausziehungen, welche unendbar sind, zu welcher Anzahl auch man die Ziffern fortsetzt, diese Wurzel, mit sich selbst multiplicirt, wird niemahls zwey hervor bringen, aber sie wird das Aequivalent, nämlich die Einheit, mit einer unendlichen Reihe von gern, im Verhältnisse der Anzahl der Ziffern ausgedrückt, hervor bringen, und zwar in das Unendliche, wenn man annimmt, daß die Anzahl der Ziffern der Wurzel in's Unendliche fortgesetzt ist.

$$\begin{array}{r}
 2 \mid 1,4142135 \text{ u. s. w.} \\
 1 \\
 \hline
 100 \\
 24 \\
 964 \\
 \hline
 400 \\
 281 \\
 281^1 \\
 \hline
 11900 \\
 2824 \\
 112964 \\
 \hline
 60400 \\
 28282 \\
 56564^2 \\
 \hline
 383600 \\
 282841 \\
 282841^1 \\
 \hline
 10075900 \\
 2828423^3 \\
 8485269^3 \\
 \hline
 159063100 \\
 28284265^5 \\
 141421325^5 \\
 \hline
 17641775
 \end{array}$$

Und weil, wie man vorher gesehen hat, die Reihe hinlänglich durch zwey oder drey Ziffern ausgedrückt ist, so kann man sagen, daß hier die Quadratwurzel von $2, = 1,4142$ ist.

Desto mehr, weil ich bemerke, daß, wenn man mit sich selbst 3,4,5,6,7 oder 8 Ziffern der Wurzel multiplicirt, und man vor dem ersten Producte der Multiplication eine Senkrechte abwärts zieht, oder abgezogen annimmt, die Anzahl der ger, die sich vor der Senkrechten befinden werden, gleich seyn wird der Anzahl der Decimalen, weniger 1, die sich in der als Factor dienenden Wurzel befinden werden.

Ich habe vor mich alle diese Resultate, allein ich werde Kürze halber nur eines angeben.

Woraus man sieht, daß vor der Senkrechten so viele ger sind, als Decimalen weniger eine in der als Factor dienenden Wurzel.

$$\begin{array}{r}
 1,4142 \\
 1,4142 \\
 \hline
 5 \overline{) 28284} \\
 \underline{56568} \\
 14142 \\
 \underline{56568} \\
 14142 \\
 \hline
 1,999 \overline{) 96164}
 \end{array}$$

Wenn die Senkrechte um eine Ziffer weiter gezogen würde, so würde sich die Reihe durch vier ger ausdrücken, allein alsdann würde die Bemerkung nicht mehr allgemein seyn, jedes Mahl als die Einheit die letzte Ziffer der als Factor dienenden Wurzel ist; wenigstens für die sieben Decimalen der Wurzel, weil ich nicht den Versuch auf eine grössere Anzahl von Decimalen, noch auf eine andere Wurzel gemacht habe; es bleibt noch zu untersuchen, ob dieß sie bey den übrigen bestätigen wird.

Man hat vorher gesehen, wie die Berechnung mittelst additioneller getel das Resultat der Multiplication der Factoren, die eine Reihe haben, ergänzt: man hat dort die Regel gesehen, die sie darüber scheint fest gesetzt zu haben: ich bin nicht sehr entfernt zu glauben, daß die Berechnung ebenfalls die additionellen Theile fest gesetzt hat in den Multiplicationen der Unendbaren Wurzeln, und daß sie diese additionellen Theile einer bestimmten Regel unterworfen hat.

Dieß ist nur noch eine Vermuthung, allein sie gründet sich auf folgendes: es ist nur seit heute *), daß ich bemerke, daß, wenn man die drey, vier und fünf ersten Ziffern der Wurzel, die ich eben ausgezogen habe, multiplicirt, und daß man den respectiven Producten das dritte, vierte und fünfte Glied der zweyten Diagonalreihe eines auf der Basis 0 2 gebildeten Differential-Dreyeckes addirt, alsdann wird das erste Resultat die Reihe von gern mit drey Ziffern, das heisst mit drey gern hervor bringen, das zweyte wird sie mit fünf gern, und das dritte wird das Quadrat, wird zwey wieder hervorbringen, wie man es hier sieht.

*) 13. May 1803.

| | | | | | |
|------------|-------------|------------|----------------|------------|-------------------|
| | 1,41 | | 1,414 | | 1,4142 |
| | <u>1,41</u> | | <u>1,414</u> | | <u>1,4142</u> |
| | 141 | | 5656 | | 28284 |
| | 564 | | 1414 | | 56568 |
| | <u>141</u> | | <u>5656</u> | | <u>14142</u> |
| 3tes Glied | 19881 | | 1414 | | 56568 |
| | <u>110</u> | 4tes Glied | <u>1999396</u> | | <u>14142</u> |
| | 19991 | | 600 | 5tes Glied | <u>1,99996164</u> |
| | | | <u>1999996</u> | | 3836 |
| | | | | | 2,00000000 |

Ich werde hier das Differential-Dreyeck, dessen Basis 0 2 ist, einschreiben sammt der Formel, nach welcher es gebildet wird.

$$\text{Glieder} = p + p \Delta (n + \bar{n} - 3) + d(n + \bar{n} - 3) - d \Delta (n + \bar{n} - 3)$$

O

| | | | | | | | |
|----|-----|------|-------|-------|-------|--------|----|
| 0. | 2 | | | | | | |
| 0. | 4. | 0 | | | | | |
| 0. | 6. | 6. | 0 | | | | |
| 0. | 8. | 24. | 16. | 0 | | | |
| 0. | 10. | 60. | 110. | 60. | 0 | | |
| 0. | 12. | 120. | 420. | 600. | 288. | 0 | |
| 0. | 14. | 210. | 1190. | 3150. | 3836. | 16800. | 0. |

Man sieht in diesem Dreyecke die Glieder 110, 600 und 3836 als additionelle Theile dieser Resultate angewendet: es bleibt aber zu untersuchen, ob das Nähnliche für die übrigen Wurzeln Statt findet.

Nachdem der erste Einwurf widerlegt worden, komme ich auf den zweyten.

Wenn die Seite des Quadrates gleich 0,5 ist, so wird das Quadrat der Diagonale auch = 0,5 seyn, weil das doppelte Quadrat der Seite auch = 0,5 ist; nun gibt es keine Zahl, die, mit sich selbst multiplicirt, 0,5 hervor bringen kann, folglich ist die Diagonale, mit der Seite verglichen, unmeßbar.

Um diesen Einwurf zu widerlegen, werde ich die Quadratwurzel von 0,5 ausziehen.

Man sieht, daß ich die Wurzel bis auf 8 Decimalen fortgesetzt habe, welche die Reihe mit sieben gern ausdrücken, und folglich um einige Decimalen zu viel, weil die vier ersten Decimalen die Reihe mit vier gern ausdrücken, welches hinlänglich ist, wie man hier sieht.

0,50 | 0,70710678

$$\begin{array}{r}
 77 \\
 \underline{49} \\
 10000 \\
 1407 \\
 \underline{9849} \\
 15100 \\
 14141 \\
 \underline{14141} \\
 9590000 \\
 14142066 \\
 \underline{8485236} \\
 110476400 \\
 14142127 \\
 \underline{98994889} \\
 1148151100 \\
 1414213488 \\
 \underline{1131370784} \\
 16780316
 \end{array}$$

Ich bemerke, daß, wenn man die vier und fünf Ziffern der Wurzel mit sich selbst multiplicirt, und man den respectiven Producten die 4 und 5 Glieder der 2ten Diagonalreihe des Differential-Dreyeckes, so auf die Basis 0. 0,5 gebildet wird, addirt; alsdann wird das erste Resultat die Reihe mit fünf gern ausdrücken, und das zweyte Resultat wird das Quadrat, wird 0,5 wieder ergänzen, wie man hier unten sieht.

$$\begin{array}{r}
 0,707 \\
 0,707 \\
 \underline{4949} \\
 4949 \\
 \underline{0,499849} \\
 150 \\
 \underline{0,499999}
 \end{array}$$

4tes Glied

5tes Glied

$$\begin{array}{r}
 0,7071 \\
 0,7071 \\
 \underline{7071} \\
 49497 \\
 \underline{40497} \\
 0,49999041 \\
 0,7071 \\
 0,7071 \\
 \underline{07071} \\
 49497 \\
 49497 \\
 \underline{0,49999041} \\
 959 \\
 \underline{0,50000000}
 \end{array}$$

Ich werde abermahls hier das Differential-Dreyeck, gebildet auf die Basis 0. 0,5 abschreiben, jedoch ohne die Formel, weil sie im-

mer die nämliche für alle Differential-Dreiecke ist, welche sie bildet, mit der einzigen Hülfe der Basis und der ersten Elementare, die hier immer $= 0$ ist; und also mit 0, 0,5 quer gesetzt, wie unten.

| | | | | | | | |
|----|------|-------|--------|--------|--------|--------|---|
| 0 | 0,5. | | | | | | |
| 0. | 1,0. | 0 | | | | | |
| 0. | 1,5. | 1,5. | 0 | | | | |
| 0. | 2,0. | 6,0. | 4,0. | 0 | | | |
| 0. | 2,5. | 15,0. | 27,5. | 15,0 | 0 | | |
| 0. | 3,0. | 30,0. | 105,0. | 150,0 | 72,0. | 0 | |
| 0. | 3,5. | 52,5. | 297,5. | 787,5. | 959,0. | 420,0. | 0 |

Dieser Einwurf wird ebenfalls durch die Ausziehung von 12,5 beantwortet werden.

Man sieht, daß ich wieder die Wurzel bis auf 8 Decimalen fortgesetzt habe, die sich auf sieben reduciren, und die Reihe mit sechs gern ausdrücken.

Weil aber die fünf ersten Ziffern selbe mit zwey gern ausdrücken, wie man hier sieht, so ist die Reihe hierdurch hinlänglich bestimmt.

$$\begin{array}{r}
 12,5 \quad | \quad 3,53553390 \\
 350 \\
 \quad 655 \\
 325 \\
 \hline
 2500 \\
 \quad 7033 \\
 2109 \\
 \hline
 39100 \\
 \quad 70655 \\
 35325 \\
 \hline
 377500 \\
 \quad 707055 \\
 353525 \\
 \hline
 2397500 \\
 \quad 7071033 \\
 2121309 \\
 \hline
 27619100 \\
 \quad 70710633 \\
 21213189 \\
 \hline
 640591100 \\
 \quad 70710669 \\
 6363960219 \\
 \hline
 4195079
 \end{array}$$

Ich bemerke wiederum, daß, wenn man die vier und fünf ersten Ziffern der Wurzel mit sich selbst multiplicirt, und man addirt den respectiven Producten das 4te und 5te Glied der 2ten Diagonalreihe des Differential-Dreyeckes gebildet auf die Basis 12,5, alsdann wird das erste Resultat die Reihe mit drey gern ausdrücken, und das 2te wird das Quadrat, wird 12,5 wieder hervor bringen, wie man es hier sieht.

| | | | |
|------------|------------------|------------|--------------------|
| | 3,535 | | 3,5355 |
| | <u>3,535</u> | | <u>3,5355</u> |
| | 17675 | | 176775 |
| | 10605 | | 176775 |
| | 17675 | | 106065 |
| | <u>10605</u> | | <u>176775</u> |
| | 12,496225 | | 106065 |
| 4tes Glied | 3750 | 5tes Glied | 23975 |
| | <u>12,499975</u> | | <u>12,49976025</u> |
| | | | 12,50000000 |

O.

| | | | | | |
|----------|---------|---------|----------|----------|------------|
| o. 12,5. | | | | | |
| o. 25,0. | o | | | | |
| o. 37,5. | 37,5. | o | | | |
| o. 50,0. | 150,0. | 100,0. | o | | |
| o. 62,5. | 375,0. | 687,5 | 375,0. | o | |
| o. 75,0. | 750,0. | 2625,0. | 3750,0. | 1800,0. | o |
| o. 87,5. | 1312,5. | 7437,5. | 19687,5. | 23975,0. | 10500,0. o |

Man sieht die Glieder 3750 und 23975 dieses Dreyeckes durch die Berechnung als additionelle Theile dieser beyden Resultate angewandt.

Es wird leicht seyn, die Richtigkeit dieser Dreyecke zu prüfen, wenn man sich erinnert, daß die Summen ihrer horizontalen Glieder, dividirt durch die respectiven Bases oder Grundzahlen, gleich sind den berühmten Zahlen 1,2,6,24,120,720,5040 u. s. w.

Ich frage mich selbst, wie kömmt es, daß das Differential-Dreyeck Einfluß haben kann auf die Quadraten 2. 0,5, und 12,5, und auf ihre Wurzeln? Wie kömmt es, daß die Berechnung sich mit so vielem Vortheile des fünften Gliedes, als additionellen Theiles, bediene, um das Quadrat bey der Multiplication der Wurzel mit sich selbst zu ergänzen, als sie sich der additionellen Neuntel bedient hat, um den Dividendus zu ergänzen und wieder hervorzubringen bey der Multiplication des Divisors mit den Quotienten, wovon der eine oder beyde mit einer Reihe sich endigten?

Ich bekenne meine Unfähigkeit, die Ursache davon zu begreifen; ich wäre aber neugierig zu erfahren, ob man es mittelst der Analyse finden kann.

Uebrigens scheint die Berechnung dadurch zu bestätigen, daß 1,4142. 0,7071 und 3,5355 die genauen Wurzeln der Quadraten 2. 0,5 und 12,5 sind; desto mehr, weil man genaue Resultate erhält, wenn man mit ihnen operirt, wie man es für die zwey ersteren schon vorher gesehen hat, und es für die dritte sehen kann, wenn man mit den Sehnen *QA* und *QF*, deren Quadrat jedes gleich 12,5, operirt, und diese Operationen werden so genaue Resultate geben, als wenn ihre Wurzeln 3,5355 nicht irrational, oder, um besser zu sagen, nicht unendbar wären.

Diese so genannten irrationalen Wurzeln, und die vermeinte Unmefsbarkeit der Diagonale, so daraus entspringt, wundern mich desto mehr, weil alle Mathematiker die Sinus-Tafeln annehmen, und sich deren bedienen, um genaue Resultate zu haben; obschon faßt alle Sinusse irrationelle und unendbare Wurzeln sind.

Ich habe heute in dem Frankfurter französischen Journale vom 26. May 1803, Num. 126 gelesen, daß ein neapolitanischer Edelmann in die königliche Bibliothek zu Neapel sein Manuscript deponirt hat, in welchem er beweiset, daß das Verhältniß des Quadrates der Seite zu der Diagonale wie 5 zu 7 ist; er hätte sagen sollen, wie 5 zu 7,071, oder wie die Quadratwurzel von 25 zu der von 50, weil das Quadrat der Diagonale dem doppelten Quadrate der Seite evident gleich ist.

Die Berechnung hat sich geweigert, dieses Verhältniß bey der ersten Potenz fest zu setzen; sie hat es in der zweyten gethan; allein es folgt nicht daraus, daß diese Quadraten unvollkommen, und ihre Wurzeln irrational seyen. Eine solche Folgerung ist nicht richtig, weil es unmöglich ist, daß die Berechnung eine so große Lücke in der Mathematik gelassen habe.

Allein ich sage mir gleich selbst, daß ich einen Theil der unnöthigen Ziffern verwerfen soll, so wohl in den Producten der Wurzeln durch sich selbst, als der beyden übrigen Factoren, welche Decimalen haben; und die Berechnung antwortet: warum sagst du, unnöthige Ziffer? Kennst du die Absichten der Berechnung genug, um ihre Operationen zu tadeln? Hast du wohl einmahl nachgedacht, durch die Vergleichung mehrerer Resultate ihre Absichten zu erforschen, und den Gang, so sie sich gewählt hat, zu kennen?

Ich werde von mehr als hundert Beyspielen, so ich angetroffen habe, nur dieses anführen:

$$\begin{array}{r}
 2,616796875 \\
 156,25 \\
 \hline
 13083984375 \\
 5233593750 \\
 15700781250 \\
 13083984375 \\
 2616796875 \\
 \hline
 408,87451171875
 \end{array}$$

Ich werde bloß den Leser auf die Linien ym und mg , aufmerksam machen. Die Summe dieser Linien ist $= PF = 4,4$. Wenn man einer jeden Werth in den Dreyecken, wozu sie gehören, nachsucht, so wird man zur Bestimmung des ersten im Dreyecke ymC folgende Proportion haben:

| | | |
|----------|---|----------|
| yCm | | ymC |
| $Sin.^2$ | : | $Sin.^2$ |
| 0,123904 | : | 0,875096 |
| | | ym^2 |
| | | $56,25$ |

| | | | | | |
|--|--------|---|--------|---|--------|
| | Fg | : | Fmg | : | mFg |
| | $Sin.$ | : | $Sin.$ | : | $Sin.$ |
| | 4,2 | : | 0,936 | : | 0,352 |

und man wird finden, daß diese Linien gleich seyn werden, nähmlich

| | | | |
|-------|--------|-----|-------------------------------------|
| | ym | $=$ | $\overline{2,82051}^s$ |
| und | mg | $=$ | $\overline{1,5794871}^s$ |
| Summe | $= yg$ | $=$ | $\overline{4,399999}^s = 4,4 = PF.$ |

P

Von den Sinussen.

Die Sinusse sind eine der wichtigsten Gegenstände des Elementartheiles, weil sie einen entschiedenen Einfluß auf alle geometrische Resultate haben. Ihre Quadrate, ihre Summen, ihre Differenzen, ihre Producte, werden darin mit dem größten Nutzen angewendet. Sie zeichnen sich besonders in dem Winkelmaße aus.

Der Elementartheil gibt zwey Arten zur Messung der Winkel an. 1) Mittelst der Sinusse; 2) mittelst der Werthe der Bogen.

Die oben erwähnte Elementargeometrie theilt diese zweyte Verfahrensart in so viele Grundsätze ein, als es verschiedene Richtungen gibt, in denen sich der Winkel befinden kann; welche Richtungen fünf an der Zahl sind.

Allein es ist überflüssig, das Gedächtniß mit fünf verschiedenen Grundsätzen zu überladen, welche die Analogie der Berechnung auf einen einzigen Grundsatz beschränkt haben mußte, ohne Rücksicht auf die Lage des Winkels, welche dem allgemeinen Grundsatz der Berechnung gleichgültig seyn mußte; Grundsatz, so man hier anführt:

Das Maß der Winkel mittelst der Bogen ist gleich der Hälfte der Summe der concaven Bogen, so zwischen ihren Seiten und deren Verlängerungen eingeschlossen sind, weniger der Hälfte des zwischen ihren Seiten eingeschlossenen convexen Bogens.

Ueberhaupt kann die Berechnung einem nähmlichen Gegenstande keine verschiedenen Grundsätze anwenden; sie hat das Maß der Winkel mittelst der Bogen auf die bloße Oeffnung ihrer Seiten eingeschränkt.

Diese Oeffnung aber wirkt nicht auf das Winkelmaß, mittelst der Sinusse auf die nähmliche Weise, als sie auf ihr Maß mittelst der Bogen wirkt, wie es allgemein bekannt ist, und es ist dieser Unterschied, der die Sinusse so wichtig und so schwer zu bestimmen macht.

Die Methode, die Sinusse mittelst der Oberfläche und des Productes der beyden Seiten zu bestimmen, ist vortheilhaft bekannt, und man ist gewiß, daß ihr dergestalt bestimmter Werth mathematisch richtig ist.

Es gibt noch verschiedene andere Arten sie zu bestimmen, und die Liste, die einen Theil dieses Werkes ausmacht, gibt die wichtigsten Sinusse der Figur an, welche alle nach verschiedenen Formeln bestimmt, und also fehlerfrey sind.

Indem ich diese Liste durchsah, habe ich mich gefragt: wie kömmt es, daß nur 3 oder 4 dieser Sinusse sich in den Tafeln befinden? Und nach abermahliger Untersuchung, die ihre Richtigkeit bestätigte, habe ich mir geantwortet: ich weiß es nicht, ich begreife es nicht.

Der Wunsch, mich zu unterrichten, gab mir das Verlangen, die Methode zu kennen, nach welcher man diese Tafeln verfertigt hat: oben erwähnte Elementargeometrie gab mir die Mittel dazu; allein bevor ich von dieser Methode rede, muß ich ein Wort sagen:

Von dem Umkreise des Zirkels und ihrem bekannten Verhältnisse zum Durchmesser, sammt der Formel, die dieses Verhältniß bestimmt.

Jedermann kennt die Bemühungen der Geometer seit dem Entstehen der Geometrie, um das Verhältniß zwischen dem Umkreise und dem Durchmesser zu finden: die Geschichte dieser Bemühungen ist selbst sonderbar und unterhaltend; sie lehrt uns, daß *Archimedes* dieses Verhältniß wie 22 zu 7 bestimmte; daß *Peter Metius* aus den Niederlanden es wie 355 zu 113 angab, und sein Zeitgenosse, der französische Geometer *Viète*, wie 3,1415926535 zu 1; daß verschiedene Geometer es hernach bis auf 16, 35, 74, 100 und endlich auf 127 Ziffern fortsetzten.

„So zwar, sagt man, daß, wenn man einen Zirkel annimmt, dessen Durchmesser tausend Millionen Mahl größer ist, als die Entfernung der Erde von der Sonne, der Fehler auf den ganzen Umkreis tausend Millionen Mahl kleiner, als der Durchmesser eines Menschenhaares seyn würde.“ So drücken sich die oben erwähnten *Recreations - Mathematiques* aus.

Sie setzen hinzu „daß *Willebrord Snellius*, Zeitgenosse des *Metius*, das Verhältniß prüfte, welches *Ludolph Van Ceulen*, ebenfalls aus den Niederlanden, bis auf 35 Ziffern fortsetzte, und er es richtig fand, daß er auch die Reihe, der dem Zirkel so wohl eingeschriebenen als umgeschriebenen Vielecke bestimmte, in dem er immer die Anzahl der Seiten verdoppelte, vom Zehneck an, bis zu demjenigen von 5242880 Seiten; so, daß man dadurch die Falschheit jeder vermeintlichen Rectificirung des Zirkels, anders, als von 3,1415926535 zu 1, beweisen kann.“

So, daß die allgemeine Meinung der Geometer dieses letzte Verhältniß als das nächste möglich annimmt, besonders wenn man das Verhältniß des *Metius* dabey in Betracht zieht, welches bis auf ein Zehntausendtheil so nahe ist, als dasjenige des *Viète*.

Denn wenn *Metius* sein Verhältniß, ohne dasjenige des *Viète*, seines Zeitgenossen zu kennen, bestimmt hat, so verdiente er gewiß die Lobsprüche, so man ihm gab.

In der Voraussetzung aber, daß *Metius* das Verhältniß des *Viète*, bevor er das seinige machte, gekannt hat, so verliert es viel von seinem Werthe; denn in dieser Voraussetzung sollte er nur was immer für ein drittes Glied annehmen, um daraus das vierte zu bestimmen; ich nehme an, was ziemlich wahrscheinlich ist, daß er 360 als drittes Glied angenommen habe: so wird er diese Proportion gehabt haben:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & : & 3,1415926535 \\
 & & \text{360} \\
 \hline
 & & 1884955592100 \\
 & & 94247779605 \\
 \hline
 & & 1130,9733552600
 \end{array}
 \quad :: \quad 360 : -$$

Man sieht also, daß er nach vollendeter Operation schon sagen konnte, daß der Durchmesser sich zum Umkreise verhalte wie 36 zu 113, auf ein Zehntheil nahe.

Weil ihm aber der Abgang dieses Zehntheiles zu groß kann geschehen haben, so war es wiederum natürlich, mit einer andern Zahl den Versuch zu machen; und vorzüglich mit 113, die ihm diese Proportion wird gegeben haben:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & : & 3,1415926535 \\
 & & \text{113} \\
 \hline
 & & 94247779605 \\
 & & 31415926535 \\
 & & 31415926535 \\
 \hline
 & & 354,9999698455
 \end{array}
 \quad :: \quad 113 : -$$

Man sieht also, daß das vierte Glied gleich ist 355, auf weniger als ein Zehntausendtheil nahe; daher das Verhältniß des *Metius* leicht gefunden werden könnte.

Allein man wird fragen, was hat dieses gemein mit dem Verhältnisse von 1 zu 3,1415926535? - - - gar nichts - - - desto weniger, weil

dieses Verhältniß bestätigt wird durch die allgemeine Formel, die das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bestimmt.

$$\pi = \overset{\text{Minute}}{\text{Sinus}} \times \overset{\text{Minuten}}{\text{Anzahl}} \times \overset{\pi}{D} \div \overset{\text{Tafeln}}{D}$$

das heißt: *der Umkreis ist gleich dem Sinus einer Minute, multiplicirt mit der Anzahl der Minuten, multiplicirt mit dem Durchmesser des Umkreises, dividirt durch den Durchmesser der Tafeln.*

Man wird also in jedem Zirkel diese Proportion haben:

$$\pi : \overset{\text{Minute}}{\text{Sinus}} :: \overset{\text{Minuten}}{\text{Anzahl}} \times \overset{\pi}{D} : \overset{\text{Tafeln}}{D}$$

und weil der Sinus einer Minute, selbst wenn man ihn nach dem Verfahren der Tafeln bestimmt, nicht 0,0002909 ist, wie er sich in den Tafeln befindet, sondern 0,0002908882 ist; weil er gleich seyn muß dem Werthe einer Minute, die in oben erwähnter Elementargeometrie als genau gleich 0,0002908882, bestimmt wird.

So, daß der Verfasser der Tafeln bey der Bestimmung des Sinus einer Minute die erste Ziffer 8, die sich im Ausdrücke des Werthes einer Minute befindet, um eins vermehret hat, indem er die drey letzten Ziffern dieses nähmlichen Werthes, nähmlich die Ziffern 882 verwarf.

Diese Vermehrungen und Verwerfungen geschehen gewöhnlich, wie bekannt, wegen der Kleinheit der Werthe; der Autor der obenwähnten Elementar-Geometrie gibt auf die letzte Seite den Werth des Bogens einer Minute, wenn der Halbmesser eins ist, = 0,00029089; welchen Werth er im §. 296 auf 0,0002908882 angegeben hat, und den er auf so viele Decimale, als er wollte, hätte fortsetzen können.

Dies geschieht sehr oft bey den übrigen Sinussen der Tafeln: ich werde den Sinus von 45 Graden als Beyspiel anführen: sein Werth wird dort = 0,7071068 angegeben, obschon er wirklich nur = 0,7071067 ist, weil das Quadrat des Sinus von 45 Graden *adquatae* gleich 0,5 ist.

Folglich, um dem Verhältnisse des *Viète* sehr nahe zu kommen, werde ich, wenn der Halbmesser eins ist, für den Sinus einer Minute 0,000290888208 annehmen, und alsdann den Umkreis durch folgende Proportion bestimmen:

$$\begin{array}{rcll}
 \pi & \text{Minute Sinus} & : : & \text{Minuten Anzahl} \times \frac{\pi}{D} : \frac{\pi}{D} \\
 \pi & : 0,000290888208 & : : & 21600 \times 2 : 2 \\
 & \underline{43200} & & \underline{2} \\
 & 58177641600 & & 43200 \\
 & 872664624 & & \\
 & 1163552832 & & \\
 & \underline{12,566370585600} & & | 2
 \end{array}$$

folglich wenn der Dmesser = 2, so ist $\pi = 6,283185292800$

folglich wenn der Dmesser = 1, so ist $\pi = 3,141592646400$

Verhältniß des *Viète* $\frac{71}{3,141592653500}$

Folglich fehlen nur 71 Zehntausend-Milliontheile, um das Verhältniß des *Viète* zu ergänzen.

Wenn der Sinus einer Minute gleich 0,000290888208; so wird der Sinus einer Secunde = 0,0000048481368; wie auch die oben erwähnte Elementar-Geometrie ihn im §. 296 angibt; aber nur die fünf ersten Ziffern seines Werthes: welches für den täglichen Gebrauch hinlänglich ist; ich habe ihn um drey Ziffern vermehrt, weil ich mir vornehme, den Umkreis mittelst der Secunden, wie ich es mit den Minuten gethan habe, zu bestimmen: daher werde ich wiederum folgende Proportion haben:

Der Umkreis verhält sich zum Sinus einer Secunde, wie die Anzahl der Secunden multiplicirt mit dem Durchmesser des Umkreises, zum Durchmesser der Tafeln.

Folglich, wenn der Halbmesser eins ist, werde ich haben:

$$\begin{array}{rcll}
 \pi & \text{Secunde Sinus} & : : & \text{Secunden Anzahl} \times \frac{\pi}{D} : \frac{\pi}{D} \\
 \pi & : 0,0000048481368 & : : & 1296000 \times 2 : 2 \\
 & \underline{2592000} & & \underline{2} \\
 & 96962736000 & & 2592000 \\
 & 436332312 & & \\
 & 242406840 & & \\
 & 96962736 & & \\
 & \underline{12,5663705856000} & & | 2
 \end{array}$$

folglich wenn der Dmesser = 2, so ist $\pi = 6,2831852928000$

folglich wenn der Dmesser = 1, so ist $\pi = 3,1415926464$

Verhältniß des *Viète* $\frac{71}{3,1415926535}$

Folglich fehlen wiederum nur 71 Zehntausend-Milliontheile, um das Verhältniß des *Viète* zu ergänzen.

Wenn man den Sinus einer *Terze* bestimmte verhältnißmäfsig nach demjenigen einer Minute, so würde dieser Sinus gleich 0,00000008080228 seyn.

Folglich, wenn man den Umkreis mittelst des Sinus einer *Terze* bestimmen will, so kann man es durch folgende Proportion:

Der Umkreis verhält sich zum Sinus einer *Terze*, wie die Anzahl der Terzen, multiplicirt mit dem Durchmesser des Umkreises, zum Durchmesser der Tafeln.

| π | Terze
Sinus | :: | Terzen
Anzahl $\times$ | π
D | :: | Tafeln
D |
|--|-------------------|----|---------------------------|--------------|----|---------------|
| π | 0,00000008080228 | :: | 77760000 | $\times 2$ | :: | 2 |
| | 155520000 | | 2 | | | |
| | 161604560000 | | 155520000 | | | |
| | 40401140 | | | | | |
| | 40401140 | | | | | |
| | 40401140 | | | | | |
| | 8080228 | | | | | |
| | 12,56637058560000 | | | | | |
| | | | 2 | | | |
| folglich wenn der Durchmesser = 2, so ist $\pi = 6,2831852928$ | | | | | | |
| folglich wenn der Durchmesser = 1, so ist $\pi = 3,1415926464$ | | | | | | |
| | | | | | | 71 |
| Verhältniß des <i>Viète</i> | | | | | | 31415926535 |

Man sieht folglich, daß wiederum nur 71 Zehntausend-Milliontheile fehlen, um dieses Verhältniß zu ergänzen.

Wenn man den Sinus einer *Quarte* nach Maß desjenigen der vorigen Minute bestimmte, so würde man haben 0,0000000013467046^s und daher der Umkreis wie folget:

| π | Quarte
Sinus | :: | Quarten
Anzahl $\times$ $\frac{\pi}{D}$ | Tafeln
D |
|-----------------------------------|----------------------------------|----|--|---------------|
| π | 0,00000000013467046 ^s | :: | 4665600000 $\times$ 2 | 2 |
| | | | 9331200000 | 2 |
| | | | 2693409200000 | 9331200000 |
| | | | 13467046 | |
| | | | 40401138 | |
| für die Reihen von 6 ^s | 40401138 | | | |
| addire | 121203414 | | | |
| $\frac{6}{7}$ von 9331200000 | 6220800000 | | | |
| | 12,5663705856000000 | | | 2 |

folglich ist der Durchmesser = 2, so ist $\pi = 6,2831852928$
 und wenn der Durchmesser = 1, so ist $\pi = 3,1415926464$

71
Verhältniß des Viète 31415926535

Man sieht also, daß wiederum nur 71 Zehntausend-Milliontheile zur Ergänzung dieses Verhältnisses fehlen.

Der Sinus einer *Quinte*, auf die nämliche Weise bestimmt, würde = 0,000000000022445077^s seyn, und der Umkreis wie folgt:

| π | Quinte
Sinus | :: | Quinten
Anzahl $\times$ $\frac{\pi}{D}$ | Tafeln
D |
|--------------------------------|-----------------------------------|----|--|---------------|
| π | 0,000000000022445077 ^s | :: | 279936000000 $\times$ 2 | 2 |
| | | | 559872000000 | 2 |
| | | | 44890154000000 | 559872000000 |
| | | | 157115539 | |
| | | | 179560616 | |
| | | | 202005693 | |
| für die Reihe 7 ^s | 112225385 | | | |
| addire | 112225385 | | | |
| $\frac{7}{9}$ von 559872000000 | 453456000000 | | | |
| | 12,566370585600000000 | | | 2 |

Ist also der Durchmesser = 2, so ist der Umkreis = 6,2831852928
 ist der Durchmesser = 1, so ist der Umkreis = 3,1415926464

71
Verhältniß des Viète 3,1415926535

Es fehlen also widerum nur 71 Zehntausend-Milliontheile, zur Ergänzung dieses Verhältnisses.

Und es bestätigt sich bis zur mathematischen Evidenz, daß die oben

gegebene Formel das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bestimmt.

Folget aber auch daraus, daß das annähernde Verhältniß des *Viëte*, man mag es auf so viele Decimalen fortsetzen, als man will, dergestalt geeignet sey, daß es unmöglich ist, ein besseres zu hoffen? Gewiß; und es ist keinem Geometer erlaubt daran zu zweifeln; desto weniger, „weil die höhere Geometrie (wie die *Récréations mathématiques* sagen) „dieses Verhältniß bestätigt, und eine große Anzahl verschiedener Verfahrensarten angibt, nach welchen man durch Annäherung die Größe des Umkreises finden kann, so zwar, daß diese „Verfahrensarten erlaubt haben, es bis auf 127 Ziffer zu bringen; so, „daß wenn selbst ein Zirkel die Entfernung der Sonne von dem ersten Fixsterne zum Halbmesser hätte, man gewiß wäre, sich auf den „Umkreis nicht um den Durchmesser eines Menschenhaares zu irren.“

Ich freue mich, daß dieses Verboth mich nicht betrifft, weil ich kein Geometer bin, und es soll mir daher erlaubt seyn, daran zu zweifeln: jedoch ohne Anspruch, sondern in der einzigen Absicht, mich zu beschäftigen und zu unterrichten.

Diese Zweifel sind folgende:

1) Dieses annähernde Verhältniß, man mag es quadriren, oder daraus die Quadratwurzel ziehen, scheint immer nur ein fehlerhaftes Resultat anzugeben, nämlich das Resultat nicht einer einzelnen, sondern mehrerer Operationen, und als solches scheint es mir unmöglich, daß es das Genaue Resultat der Berechnung sey.

2) Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise war für die Berechnung von der größten Wichtigkeit; es ist das erste, so sie hat machen sollen; es lag ihr selbst daran, dieses Verhältniß auf die einfachste Weise, ohne die mindeste Verwicklung, eben so einfach in seiner Zusammensetzung als in seinem Ausdrücke zu bestimmen; und wenn sie dem Verhältnisse diese Einfachheit in der ersten Potenz verweigert hat, wie sie es bey dem Verhältnisse der Diagonale zur Seite des Quadrates gethan hat, so könnte sie nicht ermangeln, dem Verhältnisse diese Einfachheit in einer höheren Potenz zu verleihen.

3) Ich habe daraus geschlossen, nicht bloß, daß dieses einfache Verhältniß existirte, sondern auch, daß es unmöglich wäre, daß es nicht existire.

Ich werde untersuchen, ob ich irrig geschlossen habe, um aber die-

se Untersuchung gehörig anzustellen muß ich zurück kehren zu den Sinussen und selbst zu den

Sinus-Tafeln.

Man hat schon aus dem vorhergehenden gesehen, daß ich gewiß irrig würde geschlossen haben, wenn der erste Sinus der Tafeln (nämlich der Sinus einer Minute) wirklich den Werth des Bogens einer Minute hätte, oder wenn er den annähernden Werth $= 0,0002908882$ hätte, so ihm die oben erwähnte Elementar-Geometrie gibt, und den ich in der ersten der vorigen Operationen nur um zwey Ziffern vermehrt habe; denn in diesem Falle wäre das Verhältniß des *Viète* gewiß das wahre; *weil den Umkreis des Zirkels bestimmen, nichts anders ist, als einen seiner Divisionstheile mit einer bekannten Linie vergleichen und ausgleichen.*

Welches auf die Auflösung folgendes Problems ankömmt:

Den ersten Sinus oder eine andere erste trigonometrische Linie bestimmen in Rücksicht einer der Divisionstheile des Umkreises et vice versa.

Wenn man dieses Problem aufgelöset, so hat man das Verhältniß gefunden, wenn man diese Linie mit der Anzahl der Divisionstheile multiplicirt.

Alles hängt also von diesen zwey Fragen ab: 1) hat der erste Sinus der Tafeln wirklich den Werth des Sinus einer Minute?

2) hat dieser Sinus auch den Werth der Minute, welche eine der Divisionstheile ist, durch welche die Tafeln, voraus setzen, daß der Umkreis getheilt sey? oder was das nämliche ist; hat der erste Sinus der Tafeln den Werth des Bogens einer Minute?

Bevor ich diese erste Frage beantworte, muß ich die Methode untersuchen, nach welcher man die Tafeln verfertigt hat. Oben erwähnte Elementar-Geometrie gibt diese Methode in den §§ 289 und 290 an, die, wie man mir hernach gesagt hat, die gewöhnliche ist; sie theilt sie in drey verschiedene Verfahrungsarten ab; die erste, vom 1ten Grade bis zum 3ten einschließlic; die zweyte vom 3ten Grade bis zum 87ten, und die dritte vom 87ten Grade bis zum 90ten.

Um diese Unterabtheilungen zu vertheidigen, führt man die

Kleinheit der Bogen und die unmerklichen Differenzen von der ersten Minute bis zum dritten Grade an, um deren Werth zu finden man nur den Werth des ersten Sinus mit der Anzahl der Minuten multipliciren soll: die zweyte und dritte Unterabtheilung kommen mir eben so fehlerhaft vor. Ich bin mißvergnügt über meine Unwissenheit, und es ist mit einer gänzlichen Unterwerfung dem Urtheile der aufgeklärten Mathematiker, daß ich abermahls meine Zweifel vortrage.

Vermöge der Analogie der Berechnung und der beständigen Regelmässigkeit ihres Ganges, die sich im vorhergehenden, besonders aber im ersten Theile, so evident zeigt, kann ich nicht begreifen, daß diese Verfahrensart diejenige der Berechnung sey; daß die Bestimmung des Sinus der ersten Minute bis zur letzten Minute des gegebenen Grades, die mindeste Veränderung, unter was immer für einem Vorwande, leiden könne; und wenn es einen Vorwand oder eine annehmbare Ursache für die erste Minute gibt, so muß dieses allen Minuten bis an das Ende anwendbar seyn; das heißt, die Analogie der Berechnung scheint weder eine Unterbrechung noch eine Veränderung leiden zu können.

Setzen wir aber auf einen Augenblick voraus, daß der erste Sinus der Tafeln wirklich den Werth des Sinus des Bogens einer Minute habe; würde daraus folgen, daß er auch den Werth des Bogens einer Minute hatte; ich glaube es nicht: warum? 1) weil dieser Werth nicht bewiesen ist. 2) Weil im Systeme der Tafeln der Divisionstheil des Umkreises zu groß ist, um anzunehmen, daß der Sinus einer Minute gleich dem Bogen einer Minute sey.

Denn die Berechnung, die so reich ist, der unendliche Zusammensetzungen zu Gebote stehen, muß den Werth dieses Bogens, so wie jedes anderen Bogens, geradezu, und ohne Umschweife bestimmt haben, so wie sie auch das Verhältniß des Umkreises nicht allein zum Durchmesser, sondern auch zu allen übrigen Linien, so wohl trigonometrischen, als anderen, sie mögen gerade oder krumme seyn, bestimmt haben muß, und dieß mittelst verschiedener, dem Gegenstande ihrer Vergleichung angemessener, Formeln oder Proportionen.

Archimedes, sagt man, hat bewiesen, daß, wenn der Durchmes-

ser eins ist, das eingeschriebene Vieleck von 96 Seiten ein wenig gröfser als $3\frac{10}{71}$, und das umschriebene ein wenig kleiner als $3\frac{10}{70}$ ist.

Wenn dieß wahr ist, warum hat *Snellius*, der diese nähmlichen Vielecke bestimmt hat, dem Verhältnisse des *Archimedes* nicht beygestimmt? Zeigt er, daß *Archimedes* sich in seinen Operationen geirrt hat? Und in diesem Falle, verbessert er ihn? denn, das Verhältniß des *Van Ceulen*, welches er annimmt, ist noch kleiner, als dasjenige des umschriebenen Vieleckes des *Archimedes*.

Diese Fragen stelle ich mir selbst vor, um meine Zweifel nicht zu vergessen; weil ich kein einziges mathematisches Buch gehabt, noch zu Rathe gezogen habe, ausgenommen, die oben erwähnte Elementar - Geometrie, die *Récréations Mathématiques*, und den *Thesaurus Geometriae practicae Londini sumptibus societatis* 1737.

In der That, um was handelt es sich hier? um was handelt es sich hier für *Archimedes* für *Snellius* und für den Verfasser der Sinustafeln? wenn ich mich nicht irre, so handelt es sich hier für alle drey, den genauen Werth des ersten Bogens zu kennen, das heist, des Divisions-theiles des Umkreises, im Verhältnisse der Division, welche ihre Hypothesen annehmen.

Es handelt sich hier also für *Archimedes*, den genauen Werth eines Bogens zu kennen, dessen Sehne die Seite eines Vieleckes von 96 Seiten ist.

Es handelt sich hier für *Snellius*, (der, wie die *Récréations-Mathématiques* sagen, das Verhältniß des *Ludolph van Ceulen* richtig fand, indem er ein Vieleck von 5242880 Seiten bestimmte) den genauen Werth eines Bogens zu kennen, dessen Sehne die Seite eines solchen Vieleckes ist.

Es handelt sich hier für den Verfasser der Sinustafeln, den genauen Werth eines Bogens zu kennen, dessen Sehne die Seite eines Vieleckes von 21600 Seiten ist. Das heist, des Bogens einer Minute, weil die 360 Grade des Umkreises 21600 Minuten enthalten.

Wenn nun diese drey Geometer aufmerksam gewesen wären auf den Einfluß, so die Elemente auf die Resultate, die sie suchten, haben mußten, so würden sie sich die Mühe erspart haben, den holprigen Weg des Umschweifes zu betreten, wo sie immer der Gefahr ausgesetzt waren, sich mehr oder weniger zu verirren; sie hät-

ten den geraden Weg eingeschlagen, den einzigen den die Berechnung gebahnt hat, denjenigen der Formeln und der Proportionen; sie hätten die allgemeine Formel entdeckt, so die Berechnung fest gesetzt hat, um derley Resultate zu finden, und indem sie selbe auf ihre Hypothesen anwendeten, würden sie durch eine einzelne Operation den genauen Werth des Divisionstheiles, den sie suchten, bestimmt haben.

Und wirklich ist die allgemeine Formel, so die Berechnung für derley Resultate fest gesetzt hat, folgende:

$$\text{eines Vieleckes} \quad \text{Bogen} = \sqrt{\frac{\text{Elemente} \triangle \text{Anzahl}^2 \times D}{\text{der Seiten}}}$$

Das heist: *Jeder Bogen des einem regelmässigen Vielecke umschriebenen Zirkels, ist gleich der Quadratwurzel des Quotienten aus der Division der Elemente durch das Quadrat der Anzahl der Seiten des Vieleckes, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.*

Ich werde diese Formel auf die Hypothesen des *Archimedes*, des *Snellius*, und des Verfassers der Sinustafeln anwenden.

Weil die Hypothese des *Archimedes* sein, dem Zirkel eingeschriebenes, Vieleck im 96 Seiten theilte, so werde ich die zusammengesetzten Elemente 10 durch das Quadrat von 96=9216 dividiren, und die Quadratwurzel des Quotienten wird mir den Werth des Bogens geben, dessen Sehne die Seite des Vieleckes von 96 Seiten ist.

| | | |
|------------------------|----------------------------|-----------------|
| 10 | 9216 = dem Quadrate von 96 | |
| 100 | 0,0010850694 ^s | 0,030294392293 |
| 1000 | 33 | |
| 10000 | 9 | Vieleck des Ar- |
| 7840 | 185 | chimedese 96 |
| 78400 | 62 | 96 |
| 46720 | 124 ² | 576 |
| 6400 | 6106 | 864 |
| 64000 | 649 | 9216 |
| 87040 | 5841 ⁹ | Quadrat |
| Rest $\frac{4}{3}$ des | 26594 | |
| Divisors. | 65884 | |
| 40960 | 263364 | |
| | 2584444 | |
| | 658803 ³ | |
| | 1976409 | |
| | 60803544 | |
| | 6588069 | |
| | 59292621 ⁹ | |
| | 151092344 | |
| | 65880782 ² | |
| | 131761564 ² | |
| | 1933078044 | |
| | 658807842 ² | |
| | 1317615684 ² | |
| | 61546236044 | |

Man sieht, daßs die Quadratwurzel mir 6588078449
 0,0329293 gibt; und ich sage, daßs dieser Werth 59292706041⁹
 derjenige des Bogens ist, der durch die Sei- 225353000344
 te des archimedischen Vieleckes von 96 Sei- 65880784583³
 ten gespannt wird, da dieser Geometer den 197642353749
 Durchmesser des Zirkels gleich der Einheit 27710646595
 angenommen hatte.

Ich bitte den Leser kein vorläufiges Urtheil zu fällen, bis die Be-
 rechnung diese Behauptung wird bewiesen haben; Beweis, der gleich
 folgen wird.

Ich gehe zur Hypothese des *Snellius* über, und operire auf die
 nämliche Weise:

| | | | |
|-----------------|--|------------------|----------------|
| 10 | 27487790694400 = das Quadrat von 5242880 | | |
| 100 | 0,0000000000000000363797880 | 0,00000060315659 | |
| 1000 | ⁶ 36 | Vieleck des | 5242880 |
| 10000 | | Snellius | 5242880 |
| 100000 | 03797 | | 419430400 |
| 1000000 | 12033 | | 4194304 |
| 10000000 | 3609 | | 1048576 |
| 100000000 | 18888 | | 2097152 |
| 1000000000 | 12061 | | 1048576 |
| 10000000000 | 12061 ¹ | | 2621440 |
| 100000000000 | 682700 | Quad. = | 27487790694400 |
| 1000000000000 | 1206255 | | |
| 10000000000000 | 603125 | | |
| 100000000000000 | 7957500 | | |
| 175366279168000 | 1206306 | | |
| 104395350016000 | 7237836 ⁶ | | |
| 219319779328000 | 71966400 | | |
| 269052444672000 | 12063125 ⁵ | | |
| 216623284224000 | 60315625 ⁵ | | |
| 242087493632000 | 1165077500 | | |
| 221853680768000 | 120631300 | | |
| 1962355212800 | 1085681781 ⁹ | | |
| | 79395719 | | |

Man sieht daher, daß die Ausziehung mir 0,00000060315659 für die Wurzel gibt, und man wird gleich sehen, daß diese Wurzel der Werth des Zirkelbogens ist, der durch die Seite eines Vieleckes von 5242880 Seiten gespannt wird; Zirkel, dessen Durchmesser vermöge der Hypothese des *Snellius* gleich der Einheit ist.

Ich gehe zu der Hypothese des Authors der Sinustafeln über, und operire auf die nämliche Weise: seine Hypothese war, den Bogen des Zirkels zu finden, der durch die Seite eines Vieleckes von 21600 Seiten gespannt wird; Zirkel, dessen Durchmesser der Author gleich 2 angenommen hat.

| | | |
|------------|-----------------------------|-----------------|
| 10 | 466560000=Quadrat von 21600 | |
| 100 | 0,000000021433470507544581 | 0,0001464017435 |
| 1000 | 114 | 2 |
| 10000 | 24 | 0,0002928034870 |
| 100000 | 96 | |
| 1000000 | 1833 | |
| 10000000 | 286 | |
| 100000000 | 1766 | |
| 1000000000 | 11747 | |
| 668800000 | 2924 | |
| 2022400000 | 11698 | |
| 1561600000 | 510507 | |
| 1619200000 | 292801 | |
| 2195200000 | 21770654 | |
| 3289600000 | 2928027 | |
| 2368000000 | 20496189 | |
| 2368000000 | 127446545 | |
| 3520000000 | 29280344 | |
| 3520000000 | 117121376 | |
| 2540800000 | 1032516981 | |
| 2080000000 | 292803483 | |
| 2137600000 | 878410449 | |
| 2713600000 | 16410653200 | |
| 3808000000 | 2928034865 | |
| 755200000 | 14640174325 | |
| 288640000 | 1770478875 | |

Vieleck des Autors
der Tafeln

$$\begin{array}{r}
 21600 \\
 21600 \\
 \hline
 12960000 \\
 216 \\
 432 \\
 \hline
 \text{Quadrat } 466560000
 \end{array}$$

Man sieht folglich, daß die Quadratwurzel des obigen Quotienten mir 0,0001464017435 gibt, die, multiplicirt mit 2, Werth des Durchmessers, so der Verfasser der Sinustafeln seiner Hypothese gegeben hat, 0,0002928034870 hervor bringt für den Werth des Bogens, dessen Sehne die Seite eines Vieleckes von 21600 Seiten ist; das heisst, für den Werth der Minute, die der Verfasser bestimmen wollte

und die es ihm gefallen hat, durch denjenigen von 0,0002909 auszudrücken, welchen Werth er dem ersten Sinus seiner Tafeln gegeben hat.

Ich werde nun diese beyden Resultate mit einander vergleichen:

0,0002928|034870

Folglich sieht man aus der hiernebenstehenden Sub- 0,0002909
traction einen Unterschied von 19 Zehnmilliontheilen 0,00000019
zwischen diesen beyden Resultaten, die beyde den Werth des Bogens einer Minute ausdrücken wollen.

Denn, wenn der erste Sinus der Tafeln bloß den Sinus des Bogens einer Minute ausdrücken wollte, so würde man ihm dieses vielleicht nicht absprechen; allein er will auch den Werth des Bogens einer Minute ausdrücken: weil, wenn man das Verhältniß des *Viète* von 3,1415926535 mit 21600, Anzahl der Minuten, dividirt, wird der Quotient 0,00014544410 u. s. w. seyn, die, multiplicirt mit 2, Werth des Durchmessers der Tafeln, 0,00029088820 ausmachen für den vermeinten Werth des Bogens einer Minute.

Nun ist der Divisor 21600 (der selbst, weil der Durchmesser der Tafeln = 2 ist, auf die Hälfte, nämlich auf 10800, herabgesetzt werden muß) zu klein, damit der Sinus einer Minute dem Bogen einer Minute gleich gehalten werden könne, und damit keine Differenz von 19 Zehnmilliontheilen zwischen diesem Sinus und diesem Bogen Statt finden sollte: welche Differenz dennoch eine andere von beynahe 36 Meilen auf den Umkreis der Erde hervor bringt, wenn man annimmt, daß ihr Durchmesser 1719 Meilen betrage.

Dies wird durch die Berechnung in den folgenden Operationen bestätigt werden, in welchen ich die Wurzeln der drey Hypothesen mit der Anzahl der Seiten ihrer respectiven Vielecke multipliciren werde.

Man hat oben gesehen, daß bey der Hypothese des *Archimedes* die Quadratwurzel des Quotienten aus der Division der Elemente

R

durch das Quadrat der Anzahl der Seiten seines Vieleckes von 96 Seiten gleich ist 0,032940392293

$$\begin{array}{r} 0,0329403922 \\ \hline 93 \\ 96 \end{array}$$

die ich mit der Anzahl der Seiten multiplicire.

$$\begin{array}{r} 1976423573 \\ 29646353063 \\ \hline 31622776601 \end{array} \begin{array}{l} 58 \\ 7 \\ 28 \end{array}$$

Man hat gesehen, daß in der Hypothese des *Snellius* die Quadratwurzel = 0,00000060315659, die ich mit der Anzahl der Seiten seines Vieleckes multiplicire.

$$\begin{array}{r} 0,00000060315659 \\ \hline 5242880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 482 \\ 4825 \\ 12063 \\ 241262 \\ 1206313 \\ 30157829 \\ \hline 3,1622776 \end{array} \begin{array}{l} 5252720 \\ 25272 \\ 1318 \\ 636 \\ 18 \\ 5 \\ 2257920 \end{array}$$

Man hat gesehen daß in der Hypothese des Verfassers der Tafeln die Quadratwurzel = 0,0001464017435, die ich mit der Anzahl der Seiten seines Vieleckes multiplicire.

$$\begin{array}{r} 0,0001464017435 \\ \hline 21600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 878410 \\ 1464017 \\ 29280348 \\ \hline 3,1622776 \end{array} \begin{array}{l} 461000 \\ 435 \\ 70 \\ 596000 \end{array}$$

Folglich sieht man, daß diese drey Producte gleich sind, und daß der unbedeutende Unterschied zwischen den letzten Decimalen nur von der mehr oder weniger fortgesetzten Ausziehung herkomme.

Die bloßen Resultate dieser Operationen könnten mich jedes ferneren Beweises entheben, welches mir desto mehr behagen würde, weil ich mir vorgenommen hatte, gar keinen Beweis zu geben.

Allein, weil die Berechnung sich niemahls den Beweisen entzieht, so wird sie sich gewiß demjenigen einer der Hauptverhältnisse aller mathematischen Wissenschaften nicht entziehen, wegen den Folgen, so daraus entstehen, und welche die Quadratur oder die Rectification des Umkreises in ein neues Verhältniß fest setzen.

Ich werde folglich trachten zu begreifen, wie die Berechnung sich benimmt, um den Beweis der letzten Formel zu leisten.

Und wenn ich mich irre, so bitte ich den Leser zu bedenken, daß ich kein Geometer bin; daß so viele andere sich vor mir geirrt haben, und besonders, daß er nicht auf ganzen Bänden verweilen soll, weil dieser Beweis kurz und gut, für jeden Anfänger in der Geometrie leicht begreiflich, und nur wenig Zeilen enthalten soll. Weil die Einfachheit und bestimmte Kürze der Wahrheit natürlich und eigenthümlich sind.

Weil aber die Berechnung nie den Theil, als durch die Bestimmung des Ganzen, fest setzt, ist es nothwendig vorher zu reden.

*Von der Quadratur oder der Rectificirung des Umkreises
in ein neues Verhältniß, sammt der Formel, so dieses neue Verhältniß bestimmt.*

Die Berechnung hat, um so zu sagen, das Unmögliche gethan, um dieses Verhältniß fest zu setzten. Sie gebraucht zu dieser Bestimmung eine Zahl, deren Existenz mathematisch scheint unmöglich zu seyn, nach der allgemeinen Meinung der Mathematiker.

Denn, wenn man sie fragte: kann es eine Zahl A geben, die, ohne die Einheit oder ihr Aequivalent, wie $0,9^s$, zu seyn, die Eigenschaft hat, daß, wenn diese Zahl was immer für eine andere B multiplicirt und dividirt, das Product und der Quotient so viele nähmliche erste Ziffern, als man in derselben verlangen wird, geben werden.

Alle Mathematiker würden einstimmig antworten: die Existenz einer solchen Zahl ist eine Chimäre, sie ist mathematisch unmöglich.

Diese Zahl existirt dennoch, wie man gleich sehen wird.

Man hat im Vorhergehenden den großen Einfluß gesehen, so die Berechnung den Elementen gegeben hat, man hat gesehen, wie sie alles mittelst derselben, mittelst der Dreyecke und der Formeln bestimmt.

Ich schliesse daraus, daß die Berechnung keine andere Mittel gebrauchen werde, um dieses Verhältniß fest zu setzten; denn man wird gleich den mathematischen Beweis sehen, daß dieses Verhältniß sich durch folgende Formel ausdrückt:

$$\pi = \sqrt{\text{Elemente}} \times D$$

Das heisst: *Der Umkreis des Zirkels ist gleich der Quadratwurzel der Elemente, multiplicirt mit dem Durchmesser.*

Daher wird man in jeder zirkelförmigen Figur folgende Proportionen haben:

$$\pi : \sqrt{\text{Elemente}} :: D : 1$$

Der Umkreis des Zirkels verhält sich zur Quadratwurzel der Elemente, wie der Durchmesser zum ersten Elemente.

$$\pi^2 : D^2 :: \text{Elemente} : 1$$

Das Quadrat des Umkreises des Zirkels verhält sich zum Quadrat des Durchmessers, wie die Elemente zum ersten Elemente.

Hier der Beweis:

Beweis.

1) Sey $Q\omega$ der Durchmesser des Umkreises $QE\omega D$.

Sey AC der Halbmesser.

Sey das rechtwinkelige Dreyeck $A\omega Q$.

Man ziehe die Linie As .

2) Sey der Durchmesser $Q\omega = 1$.

3) Man nehme an, dass dieser Durchmesser getheilt sey in 10^s Theile, die einander gleich sind.

4) Folglich ist jeder Divisionstheil des Durchmessers $= \frac{1}{10^s} = 0,0^s 1$.

5) Man nehme an, dass der Umkreis $QE\omega D$ durch Halbmesser in so viele unter sich gleiche Theile getheilet sey, als der Durchmesser.

Anmerkungen.

1) Die Berechnung hat für dieses Mahl von dem vorher in der Figur gegebenen Werthe abstrahirt, so wie von allen anderen Linien, ausgenommen von denjenigen, die hier bezeichnet sind.

2) Es ist evident, dass diese Voraussetzung, so wie die folgende, annehmbar ist.

3) Unter 10^s verstehe ich die Einheit mit einer unendlichen Reihe von Nullen, das heisst, *das Unendliche* oder *das unendlich Grosse*.

4) Unter $0,0^s 1$ verstehe ich die Einheit, der eine unendliche Reihe von Nullen vorgeht; das heisst: *das unendlich Kleine*.

5) Das heisst: die Divisionstheile des Durchmessers einander gleich, so wie diejenigen des Umkreises auch einander gleich.

Beweis.

6) Folglich wird man diese geometrische Proportion haben:

Jeder Divisionstheil des Durchmessers, verhält sich zu jedem Divisionstheile des Umkreises: wie der Durchmesser zum Umkreise.

7) Sey der Bogen QA einer der Divisionstheile des Umkreises, und selbst der erste Theil.

8) Folglich ist der Bogen $QA = \frac{\pi}{10^s}$.

9) Folglich spannt die Sehne QA den ersten Divisionstheil des Umkreises.

10) Folglich wird die Sehne QA gleich gehalten werden dem Bogen QA , den sie spannt.

11) Folglich ist die Sehne $QA = \frac{\pi}{10^s}$ und wird dem ersten Divisions- theile des Umkreises gleich gehalten werden.

12) Folglich wird die Sehne QA auch für senkrecht auf den Durchmesser $Q\omega$ gehalten werden.

Anmerkungen.

6) Diefs ist evident, weil

$$\frac{D}{10} : \frac{\pi}{10^s} :: D : \pi$$

Das heisst: der Durchmesser, dividirt durch 10^s , verhält sich zum Umkreise, dividirt durch 10^s , wie der Durchmesser zum Umkreise.

7) Es ist evident, daß diese Voraussetzung annehmbar ist, in der bloßen Absicht, es unsern Sinnen darzustellen.

8) Diefs ist evident; und unter π verstehe ich die Peripherie oder den Umkreis, so wie durch D den Durchmesser.

9) Diefs ist ebenfalls evident.

10) Ich sage: *gleich gehalten werden*: wegen der unendlich kleinen Krümmung des Bogens QA .

11) Diefs ist evident, weil der Bogen $QA = \frac{\pi}{10^s}$ ist, so wird sein Gleiches oder die Sehne QA ebenfalls $= \frac{\pi}{10^s}$ seyn.

12) Diefs ist ebenfalls evident; und ich sage: *für senkrecht gehalten werden*, wegen der unendlich kleinen Krümmung des Bogens QA , und folglich wegen seiner unendlich kleinen Abweichung von der senkrechten Richtung; denn in der That ist diese Sehne QA nicht senkrecht auf den Durchmesser $Q\omega$, sonst wären zwey

Beweis.

Anmerkungen.

13) Sey die Linie Qs einer der Divisionstheile des Durchmessers, und selbst der erste dieser Theile.

14) Folglich ist die Linie $Qs = \frac{1}{10^5} = 0,0^5 1$.

15) Folglich ist die Linie As desto mehr senkrecht auf den Durchmesser $Q\omega$.

16) Folglich wird selbst die Linie As die wahre und einzige Senkrechte auf den Durchmesser seyn.

rechte Winkel im rechtwinkligen Dreyecke $QA\omega$: da der Winkel $QA\omega$ ein rechter Winkel ist, weil er den vierten Theil des Umkreises zum Masse hat; dennoch kann diese Sehne QA immer als senkrecht auf den Durchmesser $Q\omega$ angenommen werden, wegen ihrer unendlich kleinen Abweichung von der senkrechten Richtung; Abweichung, die gleich ist dem Winkel $Q\omega A$, dessen Werth oder Oeffnung unendlich klein ist.

13) Es ist evident, daß diese Voraussetzung annehmbar ist, in der bloßen Absicht, es unsern Sinnen darzustellen.

14) Diefs ist evident, weil, da der Durchmesser 1 in 10^5 Theile getheilt, angenommen wird, jeder Divisionstheil $= \frac{1}{10^5} = 0,0^5 1$ ist.

15) Diefs ist evident; und ich sage: *desto mehr*, weil die Linie As sich der senkrechten Richtung um einen unendlich kleinen Werth mehr nähert, als die Sehne QA , nämlich um den Werth der Linie Qs .

16) Diefs ist evident, weil die Abweichung der Sehne QA von der senkrechten Richtung auf den Durchmesser nur eines unendlich kleinen Werthes, gleich dem Werthe des Winkels $A\omega Q$, ist; nun ist diese Abweichung durch die Richtung von As verbessert

Beweis.

- 17) Folglich wird die Linie As der Sinus des Winkels QCA seyn.
- 18) Folglich wird die Linie Qs der Sinus versus des Winkels QCA seyn.
- 19) Folglich wird die Sehne QA die Hypothenuse der Sinusse des Winkels QCA seyn.

- 20) Folglich wird man diese Proportion haben:

$$Q\omega : Q\lambda A :: Q\lambda A : Qs.$$

Anmerkungen.

und aufgehoben worden; und es ist evident, daß der Werth dieser Verbesserung sich befindet gleich dem Werthe des Winkels QAs , der gleich dem Winkel $A\omega Q$ ist, wegen den ähnlichen Dreyecken $A\omega Q$ und QAs .

Uebrigens, obschon dieser Beweis mathematisch und evident ist, bedarf ich seiner nicht; weil ich nur brauche zu beweisen, daß die Linie As desto mehr senkrecht auf den Durchmesser, als die Sehne QA , ist.

- 17) Dieß ist evident.
- 18) Dieß ist ebenfalls evident.
- 19) Dieß ist evident, weil man schon gesehen hat, daß ich unter *Hypothenuse der Sinusse* die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks verstehe, dessen beyde Seiten des rechten Winkels respective der Sinus und der *Sinus versus* eines Winkels am Mittelpuncte sind, der dieser Hypothenuse gegenüber stehet, wie hier der Winkel QCA ist.
- 20) Dieß ist evident, vermöge des Elementargrundsatzes der Geometrie: daß jede Seite des rechten Winkels mittlere Proportionale ist zwischen der Hypothenuse und dem der Seite an-

Beweis.

- 21) Folglich ist die Sehne $Q\lambda A$ mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser $Q\omega$ und dem Sinus versus Qs .
- 22) Folglich ist das Quadrat der Sehne $Q\lambda A$ gleich dem Producte aus der Multiplication des Durchmessers $Q\omega$ mit dem Sinus versus Qs .
- 23) Folglich ist das Quadrat der Sehne $Q\lambda A$ gleich dem Producte aus der Multiplication von 1 mit $0,0^s1$.
- 24) Folglich ist das Quadrat der Sehne $Q\lambda A = 0,0^s1$.
- 25) Folglich, wenn man die Quadratwurzel von $0,0^s1$ auszieht, diese Wurzel $= 0,0^s316227766$ u. s. w. seyn wird.
- 26) Folglich ist die Sehne $Q\lambda A = 0,0^s316227766$ u. s. w.
- 27) Folglich ist der Bogen QA ebenfalls $= 0,0^s316227766$ u. s. w.

Anmerkungen.

liegenden Abschnitte, so die von der Spitze des rechten Winkels gezogene Senkrechte auf die Hypothenuse macht; und weil das Dreyeck $A\omega Q$ rechtwinkelig ist, so ist es evident, daß dieser Grundsatz in der gegebenen Proportion angewendet ist.

- 21) Diefs ist evident.
- 22) Diefs ist evident.
- 23) Diefs ist evident, weil der Durchmesser als 1 angenommen ist, und sein Divisions-Theil, der Sinus versus $Qs, = 0,0^s1$ ist.
- 24) Diefs ist evident, weil 1 mit $0,0^s1$ multiplicirt, $0,0^s1$ hervor bringt.
- 25) Diefs ist evident, wie man es aus der unten gegebenen Ausziehung ansehen kann.
- 26) Diefs ist evident.
- 27) Diefs ist evident, weil man eben gesehen hat, daß die Sehne $Q\lambda A$ gleich dem Bogen QA ist, we-

Beweis.

28) Folglich ist einer der 10^5 Divisions - Theile des Umkreises = $0,0^5316227766$ u. s. w.

29) Folglich, wenn man $0,0^5316227766$ u. s. w. mit 10^5 Anzahl der Divisions-Theile des Umkreises multiplicirt, muß das Product den Werth des Umkreises geben.

30) Folglich ist der Umkreis $QED = 3,16227766$ u. s. w.

31) Folglich, weil der Durchmesser als 1 angenommen worden ist, so wird man diese Proportion haben:

$$D : \pi :: 1 : 3,16227766 \text{ u. s. w.}$$

32) Folglich, wenn man quadriert, wird man diese Proportion haben.

Anmerkungen.

gen der unendlich kleinen Krümmung dieses Bogens.

28) Diefs ist evident, vermöge der oben gemachten annehmbaren Voraussetzung.

29) Diefs ist evident, weil der Quotient multiplicirt mit dem Divisor den Dividendus hervor bringen muß, nun ist hier der Quotient $0,0^5316227766$ u. s. w., der Divisor ist 10^5 , und der Dividendus ist der Umkreis: folglich u. s. w.

30) Diefs ist evident, weil, wenn man $0,316227766$ u. s. w. mit 10 multiplicirte, das Product = $3,16227766$ u. s. w. seyn würde; folglich, wenn man $0,0^5316227766$ u. s. w. mit 10^5 multiplicirt, muß das Product auch = $3,16227766$ u. s. w. seyn; überhaupt, wenn die Anzahlen der Nullen in diesen beyden Factoren gleich sind, so muß das Product = $3,16227766$ u. s. w. seyn, wie es evident ist.

31) Diefs ist evident.

32) Diefs ist evident, weil, wenn man die vier Glieder einer geometrischen Proportion quadriert,

Beweis.

$$D^2 : \pi^2 :: 1 : 10.$$

Das heißt: das Quadrat des Durchmessers verhält sich zum Quadrate des Umkreises, wie das erste Element zu den Elementen.

33) Folglich wird man haben.

$$\pi^2 : 10 :: D^2 : 1$$

man wird haben:

$$\pi : \sqrt{10} :: D : 1$$

Daher diese Formel:

$$\pi = \sqrt{10} \times D$$

Was zu beweisen war, nämlich, daß der Umkreis gleich der Quadratwurzel der Elemente multiplicirt mit dem Durchmesser ist.

Anmerkungen.

diese Quadraten in Proportion bleiben; nun ist das Quadrat von $1=1$ das Quadrat von $3,16227766$ u. s. w. $=10$, wie man es aus der unten gegebenen Ausziehung ersehen kann.

33) Diefß ist evident, vermöge der Grundsätze der Proportionen.

IO | 3,1622776601683793319 u. s. w. = Der Quadratwurzel der Elemente.

$$\begin{array}{r} 3_3 \\ 9 \\ \hline 100 \\ 61^1 \\ \hline 3900 \\ 626^6 \\ 3756 \\ \hline 14400 \\ 6322 \\ 12644^2 \\ \hline 175600 \\ 63242 \\ 126484^2 \\ \hline 4911600 \\ 632447 \\ 4427129^7 \\ \hline 48447100 \\ 6324547 \\ 44271829^7 \\ \hline 417527100 \\ 63245546^6 \\ 379473276 \\ \hline 3805382400 \\ 632455526^6 \\ 3794733156 \\ \hline 106492440000 \\ 63245553201^1 \\ 63245553201^1 \\ \hline 4324688679900 \\ 632455532026^6 \\ 3794733192156 \\ \hline 52995548774400 \\ 6324555320328^8 \\ 50596442562624 \\ \hline 239910621177600 \end{array}$$

Fortsetzung : 239910621177600
~~63245553203363~~
 189736659610089³
~~5017396156751100~~
~~632455532033667~~
 4427188724235669⁷
~~59020743251543100~~
~~6324555320336749~~
 56920997883030741⁹
~~209974536851235900~~
~~63245553203367583~~³
 189736659610102749³
~~2023787724113315100~~
~~632455532033675863~~³
 1897366596101027589³
~~12642112801228751100~~
~~6324555320336758661~~¹
~~6324555320336758661~~¹
~~631755748089199243900~~
~~63245553203367586629~~
 569209978830308279661⁹
~~62545769258890964239~~

Diese Wurzel ist gleich derjenigen
 ausgezogen aus 0,1, auſſer daſs das Com-
 ma geſtellt wird, vor der erſten Ziffer,
 wie hier 0,316 u. s. w. ſo jedermann weiſs.

Jetzt soll ich beweisen, daß die Quadratwurzel von 10 gleich ist derjenigen von $9,9^{\circ}$.

$$\begin{array}{r}
 9,9^{\circ} \mid 3,1622776601 \text{ u. s. w.} \\
 \underline{33} \\
 99 \\
 \underline{61}^1 \\
 3899 \\
 \underline{626}^6 \\
 3756 \\
 \underline{14399} \\
 6322 \\
 \underline{12644}^2 \\
 175599 \\
 \underline{63242}^2 \\
 126484^2 \\
 4911599 \\
 \underline{632447}^7 \\
 4427129^7 \\
 48447099 \\
 \underline{6324547}^7 \\
 44271829^7 \\
 417527099 \\
 \underline{63245546}^6 \\
 379473276^6 \\
 3805382399 \\
 \underline{632455526}^6 \\
 3794733156^6 \\
 106492449999
 \end{array}$$

Es wäre unnöthig fort zu fahren, weil diese beyden Wurzeln gleich seyn müssen, auf was immer für eine Anzahl von Ziffern man sie bringen wollte.

Woraus folget, daß $10 = 9,9^{\circ}$; und $0,1 = 0,09^{\circ}$ u. s. w.

Man sieht folglich, daß die Berechnung das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise auf die angegebene Weise festgesetzt hat: der Beweis ist selbst kurz abgefaßt; er wäre noch kürzer gewesen, wenn ich mich nicht gefürchtet hätte für das Wort des Horaz: *Si brevis sum obscurus fio.*

Man wird immer das nämliche Resultat haben, welchen Werth man auch dem Durchmesser gibt, wenn man nur für Divisor 10^5 nimmt.

Man hat in dem Beweise gesehen, daß die erste Proportion, so aus der Division des Durchmessers und des Umkreises entstanden, folgende war: jeder Divisions-Theil des Durchmessers verhält sich zu jedem Divisions-Theile des Umkreises, wie der Durchmesser zum Umkreise; man hat daher folgende Proportion:

$$Qs : QA :: D : \pi$$

$$0,0^51 : 0,0^5316227766 \text{ u. s. w.} :: 1 : 3,16227766 \text{ u. s. w.}$$

Denn man hat gesehen, daß der Sinus versus $Qs = 0,0^51$, und die Hypothenuse der Sinusse $QA = 0,0^5316227766$ u. s. w. ist; und weil diese beyden Linien respective die Divisions-Theile des Durchmessers und des Umkreises durch einen nämlicheu Divisor sind, so folgt daraus, daß die gegebene Proportion, deren 3 erste Glieder bekannt sind, das vierte Glied, welches der Umkreis ist, angibt.

Daraus folgt, daß man auch den Umkreis für einen als 2 angenommenen Durchmesser folgender Weise bestimmen kann.

1) Indem man den Durchmesser durch 10^5 dividirt, welches für den Quotienten den Sinus versus $Qs = 0,0^52$ geben wird.

2) Indem man $0,0^52$ mit dem Durchmesser 2 multiplicirt, so wird das Product das Quadrat der Hypothenuse der Sinusse $QA = 0,0^54$ geben.

3) Wenn man die Quadratwurzel aus $0,0^54$, so ist diese Wurzel $= 0,0^5632455532$ u. s. w. $=$ der Hypothenuse der Sinusse $QA =$ dem Bogen QA .

4) Man wird folglich diese Proportion haben:

$$Qs : QA :: D : \pi$$

$$0,0^52 : 0,0^5632455532 \text{ u. s. w.} :: 2 : 6,32455532 \text{ u. s. w.}$$

Denn wenn man alle diese Glieder durch 2 dividirt, so wird man die nämliche Proportion wie vorher haben: und es ist evident, daß, weil in dieser Proportion die drey ersten Glieder bekannt sind, das 4te, welches der Umkreis ist, daraus dergestalt entspringen muß, wie es sich in der Proportion befindet.

Das Nämliche wird Statt finden, für jeden anderen Werth, den man den Durchmesser geben wird.

Dieses reducirt sich daher auf folgende Proportion, deren drey erste Glieder immer bekannt seyn werden:

$$D \propto 10^9 : \sqrt{D \propto 10^5 \times D} :: D : \pi$$

Aus allen diesem folgt, daß der Beweis der oben gegebenen Formel, nämlich: *der Bogen, der durch die Seite eines regelmässigen Viereckes gespannt wird, gleich* $\sqrt{\text{Elemente} \propto \overset{\text{der Seiten}}{\text{Anzahl}^2} \times D}$ unnöthig wird, weil man nur braucht den Umkreis durch die Anzahl der Seiten zu dividiren, um die Formel zu prüfen.

Es liegt in der Natur der Wahrheit, mitsich charakteristische Merkmale zu tragen, die nur ihr allein eigen sind; es sind folgende:

Man hat gesehen, wie sehr die Elemente mit einem wachsenden Einflusse herrschen, sowohl im ersten als im zweyten Theile. Man hat gesehen, daß dieser Einfluß sich besonders in den schwersten Operationen auszeichnet.

Nur werde ich mich begnügen zu sagen: 1) daß der Durchmesser mittlere Proportionale zwischen dem Umkreise und dem Umkreise dividirt durch die Elemente ist.

2) Daß der Umkreis gleich der Quadratwurzel aus dem Producte der Multiplication des Quadrates des Durchmessers durch die Elemente ist.

3) Daß die Oberfläche des Zirkels $= \sqrt{R^4 \times \text{Elemente}}$ das heißt, *daß die Oberfläche des Zirkels gleich ist der Quadratwurzel, aus dem Producte der Multiplication des Halbmessers, zur 4ten Potenz erhoben, mit den Elementen.*

Denn wenn man 24414,0625 Werth des Halbmessers 12,5 zur 4ten Potenz erhoben, mit den Elementen multiplicirt, und die Quadratwurzel aus dem Producte 244140,625 zieht; so wird die Wurzel gleich 494,1058844, Werth der Oberfläche des Zirkels $QE \omega D$, seyn.

Allein, das vorzüglich charakteristische Kennzeichen der Richtigkeit dieses Verhältnisses ist, weil die zahlreichen Formeln, die in der Liste enthalten sind, sich sowohl auf die Werthe des Beweises, als auf diejenigen der Figur anwenden lassen.

Ferner, daß der Abstand des Schwerpunctes des halben Umkreises vom Mittelpuncte gleich dem Umkreise dividirt durch die Elemente, gleich der Sehne Aq ist.

Es bleibt mir noch übrig, ein anderes nicht weniger charakteristisches Kennzeichen zu beweisen, nämlich, daß die Berechnung bey der Bestimmung dieses Verhältnisses, um so zu sagen, das Unmög-

liche gethan hat, indem sie darin eine bestimmte Zahl A gebraucht, deren Existenz mathematisch unmöglich nach der Meinung aller Mathematiker zu seyn scheint; eine Zahl, die (ohne die Einheit oder ihr equivalent zu seyn:) wenn man mit ihr was immer für eine Zahl B , multiplicirt und dividirt, ein Product und einen Quotienten hervorbringen wird, die einander gleich seyn werden in so vielen ersten Ziffern als man verlangen wird.

Ich setze voraus, daß man die Gleichheit der 6 ersten Ziffern im Quotienten und im Producte verlangt.

Ich habe diese Gleichheit aus verschiedenen Versuchen, die ich gemacht habe, bekommen: hier werde ich die Zahl 123456780^s nehmen, die ich multipliciren und dividiren werde, mit der Quadratwurzel der Elemente zur unendlichen Potenz erhoben, das heißt, mit der Quadratwurzel von 10^s die $= 316227766$ u. s. w. ist.

Man sieht, daß die sechs ersten Ziffern des Quotienten gleich sind

$$\begin{array}{r} 123456780^s \quad | \quad 3162277 \text{ u. s. w.} \\ 28588470 \quad 390404 \\ \hline 12797700 \\ 14659200 \\ 2010092 \end{array}$$

Man wird sehen, daß die 6 ersten Ziffern des Productes die nämlichen seyn werden.

$$\begin{array}{r} 123456780^s \\ 3162277 \text{ u. s. w.} \\ \hline 864197460^s \\ 8 \quad 6419746 \\ 24 \quad 691356 \\ 246 \quad 91356 \\ 7407 \quad 4068 \\ 12345 \quad 678 \\ 370370 \quad 34 \\ \hline 390404 \quad 535888060^s \end{array}$$

Man sieht folglich, daß die ersten Ziffern des Productes gleich sind den ersten Ziffern des Quotienten, und dieß ist, glaube ich, die einzige Zahl, die diese so sonderbare Eigenschaft hat, daß man denjenigen für einen Schwärmer halten würde, der es ohne Beweis zu behaupten wagen würde; so sehr scheint sie den allgemeinen und Elementar-Kenntnissen der Mathematik zuwider zu seyn, und das Merkmal einer offenen Unmöglichkeit mit sich zu führen.

Ich habe auch die Ziffern dieser nämlichen Zahl unter sich versetzt, welches mir 831625470^s gegeben hat, die multiplicirt und dividirt, wie vorher, 262983 für die ersten Ziffer des Quotienten und des Productes hervorgebracht hat.

Es ist nur während dem Aufsetzen dieses Werkes, das ich bemerkt habe, daß dieses nähmliche Resultat von 390404 gleich ist dem Quotienten der Division von 3162277 durch 81 Quadrat von 9.

Ich bemerke noch, daß dieses nähmliche Resultat, multiplicirt mit 3, und hernach dividirt mit 4, die Werthhabenden Ziffern des Quotienten gleich sind (abstrahirt vom Comma) dem streitigen Werthe des ersten Sinus der Tafeln, nähmlich demjenigen von 292803; folglich vermehrt, um den Abgang von 19 Zehnmilliontheilen, die dem ersten Sinus, wie er sich in den Tafeln befindet, fehlen: Abgang, dessen Existenz durch den Beweis richtig befunden worden, und dessen bloßer Zusatz die Rectificirung des Zirkels in ein neues Verhältniß fest setzt.

Hier sind endlich noch einige charakteristische Züge, welche den Umkreis in unmittelbares Verhältniß mit den vorzüglichsten Linien der Figur stellen.

1) Daß die vierte Potenz des Sinus versus Qs , multiplicirt mit der 5ten Potenz der Elemente, gleich ist dem Quadrate des Umkreises.

2) Daß die Quadratwurzel des Productes der Elemente durch die 8te Potenz der Hypothenuse der Sinusse QA gleich ist der Oberfläche des Zirkels $QE_{\infty}D$.

3) Daß die 4te Potenz des Sinus versus VY , multiplicirt mit den Elementen, gleich ist dem Quadrate des Umkreises.

4) Daß das Quadrat des Sinus versus qr , multiplicirt mit der dritten Potenz der Elemente, gleich ist dem Quadrate des Umkreises.

5) Daß die Sehne Aq gleich ist dem Umkreise, dividirt durch die Elemente.

6) Daß der Sinus des Winkels, der dem Sinus versus qr gegenüber stehet, gleich ist dem Umkreise, dividirt durch das Product des Durchmessers mit dem Quadrate der Elemente.

Diese Gleichungen erinnern mich desjenigen, was vorher vom Sinus versus gesagt worden, daß das erste Element, indem es ihm Gerechtigkeit widerfahren läßt, ihn mit Hülfe des zweyten Elementes aus der Vernachlässigung, indem er verborgen zu seyn schien, ziehen würde.

Liste der Linien der Figur.

| | | | | | |
|----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| <i>DE</i> | 25, | <i>Ly</i> | 2,916 ^s | <i>FV</i> | 4,472 |
| <i>AD</i> | 20, | <i>Fe</i> | 2,56 ^s | <i>PL</i> | 1,283 ^s |
| <i>AE</i> | 15, | <i>eg</i> | 1,63 ^s | <i>VD</i> | 11,180339 |
| <i>AB</i> | 12, | <i>Le</i> | 4,583 ^s | <i>VA</i> | 11,180339 |
| <i>AC</i> | 12,5 | <i>Ae</i> | 5,83 ^s | <i>VA²</i> | 125, |
| <i>FC</i> | 12,5 | <i>Ag</i> | 5,6 | <i>Vy</i> | 5, |
| <i>Qs</i> | 0,5 | <i>gD</i> | 14,4 | <i>yC</i> | 7,5 |
| <i>sC</i> | 12, | <i>FK</i> | 5,25 | <i>LC</i> | 10,416 ^s |
| <i>QA</i> | 3,5355 | <i>KH</i> | 6,75 | <i>LD</i> | 10,416 ^s |
| <i>QF</i> | 3,5355 | <i>FH</i> | 12, | <i>yx</i> | 2,8 |
| <i>FA</i> | 7, | <i>AK</i> | 8,75 | <i>yh</i> | 1,6 ^s |
| <i>Fs</i> | 3,5 | <i>KD</i> | 11,25 | <i>Kh</i> | 2,083 ^s |
| <i>As</i> | 3,5 | <i>Ay</i> | 10, | <i>hH</i> | 4,6 ^s |
| <i>Z⁰</i> | 13,44 | <i>Dy</i> | 10, | <i>hC</i> | 5,83 ^s |
| <i>ZA</i> | 13,44 | <i>Ky</i> | 1,25 | <i>Ph</i> | 5,86 ^s |
| <i>tA</i> | 6,72 | <i>LO</i> | 4,583 ^s | <i>Dx</i> | 12,8 |
| <i>tZ</i> | 6,72 | <i>LD</i> | 10,416 ^s | <i>xA</i> | 7,2 |
| <i>Ft</i> | 1,96 | <i>DO</i> | 7, | <i>hg</i> | 3,15 |
| <i>Fg</i> | 4,2 | <i>FO</i> | 8,8 | <i>xg</i> | 1,6 |
| <i>g^ε</i> | 4,032 | <i>PF</i> | 4,4 | <i>tc</i> | 10,54 |
| <i>εF</i> | 1,176 | <i>PO</i> | 4,4 | <i>dp</i> | 1,31966 |
| <i>FD</i> | 15, | <i>PV</i> | 0,8 | <i>ED</i> | 13,824 |
| <i>FL</i> | 4,583 ^s | <i>VO</i> | 4,472 | <i>Dω²</i> | 312,5 |
| <i>LA</i> | 10,416 ^s | <i>VO²</i> | 20, | <i>Dω</i> | 17,677669 |

| | | | | | |
|------------|-----------------------|-------------|----------------------|-------------|-------------|
| <i>bD</i> | 16,6 ^s | <i>Ce</i> | 4,375 | <i>VP</i> | 0,8 |
| <i>yb</i> | 13,3 ^s | <i>eB</i> | 2,625 | <i>PC</i> | 11,7 |
| <i>bc</i> | 20,83 ^s | <i>eA</i> | 9,375 | <i>Qω</i> | 25, |
| <i>bV</i> | 8,3 ^s | <i>eq</i> | 8,125 | <i>Dζ</i> | 12,5 |
| <i>VC</i> | 12,5 | <i>er</i> | 5,625 | <i>ζE</i> | 12,5 |
| <i>ΨQ</i> | 3,64583 ^s | <i>rq</i> | 2,5 | <i>EB</i> | 12,5 |
| <i>FΨ</i> | 0,52083 ^s | <i>Cv</i> | 15,625 | <i>Cζ</i> | 12,5 |
| <i>ΨC</i> | 13,02083 ^s | <i>Eν</i> | 9,375 | <i>CE</i> | 12,5 |
| <i>Ψπ</i> | 5,72916 ^s | <i>rν</i> | 5,625 | <i>Cv</i> | 12,5 |
| <i>πQ</i> | 9,375 | <i>er</i> | 5,625 | <i>βE*</i> | 117,1875 |
| <i>πC</i> | 15,625 | <i>qv</i> | 3,125 | <i>βE</i> | 10,82525 |
| <i>πb</i> | 5,2083 ^s | <i>eν</i> | 11,25 | <i>Cγ</i> | 10,82525 |
| <i>πV</i> | 3,125 | <i>Aν</i> | 9,375 | <i>γω</i> | 1,67475 |
| <i>Aq</i> | 7,905694 | <i>Ar</i> | 7,5 | <i>ωE*</i> | 41,86875 |
| <i>Aq²</i> | 62,5 | <i>rE</i> | 7,5 | <i>ωg²</i> | 10,4671875 |
| <i>CB</i> | 3,5 | <i>xB</i> | 9,6 | <i>gE*</i> | 10,4471875 |
| <i>Da</i> | 5, | <i>MB</i> | 7,2 | <i>Cg²</i> | 145,7828125 |
| <i>DI</i> | 7, | <i>Cr</i> | 10, | <i>Cv²</i> | 156,25 |
| <i>DC</i> | 12,5 | <i>bA</i> | 16,6 ^s | <i>ζγ</i> | 6,25 |
| <i>DH</i> | 9, | <i>pC</i> | 11,180339 | <i>γE</i> | 6,25 |
| <i>HC</i> | 3,5 | <i>pC²</i> | 125, | <i>ωE²</i> | 312,5 |
| <i>CE</i> | 12,5 | <i>Dp²</i> | 31,25 | <i>ωE</i> | 17,677669 |
| <i>Cβ</i> | 6,25 | <i>Dp</i> | 5,590169 | <i>ωC</i> | 12,5 |
| <i>Bβ</i> | 2,75 | <i>Vp</i> | 5,590169 | <i>VE*</i> | 500, |
| <i>CD²</i> | 111,1 ^s | <i>bν</i> | 26,0416 ^s | <i>VE</i> | 22,360679 |
| <i>CD</i> | 10,640925 | <i>An</i> | 7,8125 | <i>*qD²</i> | 562,5 |
| <i>DB²</i> | 1,7361 ^s | <i>Cn</i> | 7,8125 | <i>*qD</i> | 23,71708245 |
| <i>DB</i> | 1,317625 | <i>Vn</i> | 7,8125 | <i>*vD²</i> | 712,890625 |
| <i>Dr²</i> | 11,1 ^s | <i>rn</i> | 2,1875 | <i>*vD</i> | 26,70001170 |
| <i>Dr</i> | 3,3 ^s | <i>*Fq²</i> | 202,5 | <i>*vE*</i> | 447,1140625 |
| <i>BC²</i> | 140,625 | <i>*Fq</i> | 14,23024947 | <i>*vE</i> | 21,1450718 |
| <i>BC</i> | 11,858836 | <i>*FE</i> | 20, | | |

NB. Alle jene Buchstaben, die in der Kupfertafel mit lateinischer Schreibschrift stehen, sind hier im Texte mit deutscher Frakturschrift ausgedrückt.

| | | | |
|-------------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------------------|
| <i>*Dd</i> ² | 33, | <i>Gl</i> | 3,608439(18225 |
| <i>*Dd</i> | 5,7445626 | <i>GB</i> ² | 52,083 ^s |
| <i>ED</i> | 13,824 | <i>GB</i> | 7,216878(3645 |
| <i>Lδ</i> | 2,75 | <i>GN</i> ² | 52,083 ^s |
| <i>δC</i> | 2,75 | <i>GN</i> | 7,216878(3645 |
| <i>IB</i> | 9, | <i>Gβ</i> ² | 13,02083 ^s |
| <i>aI</i> | 2, | <i>Gβ</i> | 3,608439(18225 |
| <i>IH</i> | 2, | <i>Fm</i> ² | 20,1347795 |
| <i>HB</i> | 7, | <i>Fm</i> | 4,4871794 ^s |
| <i>Hδ</i> | 0,75 | <i>mg</i> | 1,5794871 |
| <i>δB</i> | 6,25 | <i>mg</i> ² | 2,49477974 ^s |
| <i>BE</i> | 6,25 | <i>ym</i> | 2,82051 |
| <i>Cβ</i> | 6,25 | <i>ym</i> ² | 7,955292570677186061801446416831032 |
| <i>ME</i> | 2,5 | <i>bf</i> | 13,02083 ^s |
| <i>Mq</i> | 7,5 | <i>vf</i> | 13,02083 ^s |
| <i>CN</i> ² | 208,3 ^s | <i>Cf</i> | 13,02083 ^s |
| <i>CN</i> | 14,433756729 | <i>Qf</i> | 0,52083 ^s |
| <i>EN</i> ² | 52,083 ^s | <i>Af</i> | 3,64583 ^s |
| <i>EN</i> | 7,2168783645 | <i>wf</i> | 4,323806240 |
| <i>BN</i> ² | 52,083 ^s | <i>wb</i> | 8,697027093 ^s |
| <i>BN</i> | 7,216878(3645 | <i>sf</i> | 1,02083 ^s |
| <i>EG</i> ² | 52,083 ^s | <i>wv</i> | 17,344639573 ^s |
| <i>EG</i> | 7,216878(3645 | <i>wA</i> | 7,969639573 ^s |
| <i>IN</i> ² | 13,02083 ^s | <i>en</i> | 3,4875 |
| <i>IN</i> | 3,608439(18225 | <i>Cui</i> | 14,824478 |
| <i>Gl</i> ² | 13,02083 ^s | | |

NB. Die Linien, die mit * bezeichnet sind, sind nicht gezogen worden.

Liste der Sinusse.

| | | | |
|------------|-----------|--------------|------------|
| <i>DAE</i> | 1 | <i>qAr</i> | 0,3162277 |
| <i>AED</i> | 0,8 | <i>qEr</i> | 0,3162277 |
| <i>ADE</i> | 0,6 | <i>EqC</i> | 0,9486832 |
| <i>DCA</i> | 0,96 | <i>vAq</i> | 0,3162277 |
| <i>DAC</i> | 0,6 | <i>vEq</i> | 0,3162277 |
| <i>DCF</i> | 0,96 | <i>vAr</i> | 0,6 |
| <i>DFC</i> | 0,8 | <i>vEr</i> | 0,6 |
| <i>FDC</i> | 0,8 | <i>QAs</i> | 0,14142 |
| <i>DIA</i> | 0,8 | <i>QFs</i> | 0,14142 |
| <i>AIE</i> | 0,8 | <i>FQA</i> | 0,28 |
| <i>FCE</i> | 0,96 | <i>QsA</i> | 1 |
| <i>ACE</i> | 0,96 | <i>AQs</i> | 0,9899494 |
| <i>ACv</i> | 0,6 | <i>FQs</i> | 0,9899494 |
| <i>CAE</i> | 0,8 | <i>FtA</i> | 1, |
| <i>CEA</i> | 0,8 | <i>FZt</i> | 0,28 |
| <i>ABC</i> | 1, | <i>ZFt</i> | 0,96 |
| <i>BAC</i> | 0,28 | <i>* ZFA</i> | 0,5376 |
| <i>HFC</i> | 0,28 | <i>FCZ</i> | 0,5376 |
| <i>FCQ</i> | 0,28 | <i>tAC</i> | 0,8432 |
| <i>ACQ</i> | 0,28 | <i>tZC</i> | 0,8432 |
| <i>FCA</i> | 0,5376 | <i>ZCA</i> | 0,90660864 |
| <i>CFA</i> | 0,96 | <i>FAt</i> | 0,28 |
| <i>CAF</i> | 0,96 | <i>DAI</i> | 0,28 |
| <i>vCE</i> | 0,6 | <i>AID</i> | 0,8 |
| <i>CvE</i> | 0,8 | <i>IAC</i> | 0,352 |
| <i>CvA</i> | 0,8 | <i>FDA</i> | 0,28 |
| <i>CAv</i> | 1, | <i>AFD</i> | 0,8 |
| <i>CEv</i> | 1, | <i>FgA</i> | 1, |
| <i>BAE</i> | 0,6 | <i>AFg</i> | 0,8 |
| <i>ABM</i> | 0,8, | <i>DFg</i> | 0,96 |
| <i>AMB</i> | 1, | <i>FKg</i> | 0,8 |
| <i>ArC</i> | 1, | <i>KFg</i> | 0,6 |
| <i>Agr</i> | 0,8 | <i>DFH</i> | 0,6 |
| <i>AqC</i> | 0,9486832 | <i>FKD</i> | 0,8 |

| | | | |
|------------------------|------------|--------------------------------|---------------------|
| <i>gED</i> | 1, | <i>AvE</i> | 0,96 |
| <i>AyC</i> | 1, | <i>vAe</i> | 0,96 |
| <i>FPC</i> | 1, | <i>AqE</i> | 0,6 |
| <i>DFO</i> | 0,28 | <i>AvC</i> | 0,8 |
| <i>ODF</i> | 0,352 | <i>EoC</i> | 0,8 |
| <i>DOF</i> | 0,6 | <i>DVA</i> | 0,8 |
| <i>FCV</i> | 0,352 | $\omega C\mathfrak{B}$ | 0,5 |
| <i>IAB</i> | 0,6 | $C\mathfrak{B}\gamma$ | 0,8660254(0436 |
| <i>AFO</i> | 0,6 | $C\mathfrak{B}\gamma^*$ | 0,75 |
| <i>FAO</i> | 0,352 | $C\gamma\mathfrak{B}$ | 1, |
| <i>FAD</i> | 0,6 | $\omega C\upsilon^*$ | 0,0669872978 |
| <i>FOA</i> | 0,28 | $\omega C\upsilon$ | 0,2588190 |
| <i>*OZF</i> | 0,352 | $\gamma\mathfrak{B}\omega^*$ | 0,0669872978 |
| <i>ALF</i> | 0,5376 | $\gamma\mathfrak{B}\omega$ | 0,2588190 |
| <i>LFe</i> | 0,96 | $C\omega\mathfrak{B}$ | 0,9659258(26 |
| <i>FAL</i> | 0,352 | $C\upsilon\omega$ | 0,9914448(61 |
| <i>*OZA</i> | 0,6 | $\mathfrak{D}\omega\upsilon^*$ | |
| <i>ZOA</i> | 0,5376 | $\mathfrak{D}\omega\upsilon$ | 0,1305261(91 |
| <i>Aeg</i> | 0,96 | ϵAq | 0,82219219 |
| <i>DAO</i> | 0,28 | <i>rAn</i> | 0,28 |
| <i>VDE</i> | 0,8944 | <i>Anr</i> | 0,96 |
| <i>VED²</i> | 0,2 | <i>FCV</i> | 0,352 |
| <i>VED</i> | 0,4472 | <i>PFC</i> | 0,936 |
| <i>VFP</i> | 0,17888 | <i>FCq</i> | 0,936 |
| <i>VOP</i> | 0,17888 | <i>DdV²</i> | 0,2 |
| <i>OVF</i> | 0,352 | <i>DdV</i> | 0,4472 |
| <i>OVP</i> | 0,98387089 | <i>*DdC²</i> | 0,9469 ^s |
| <i>DCd²</i> | 0,2 | <i>*DdC</i> | 0,97312368 |
| <i>DCd</i> | 0,4472 | <i>DbA</i> | 0,96 |
| <i>DVa</i> | 0,4472 | <i>DbC</i> | 0,6 |
| <i>DVC²</i> | 0,8 | <i>AbC</i> | 0,6 |
| <i>DVC</i> | 0,8944 | <i>CWR</i> | 0,70710678 |
| <i>bVD²</i> | 0,8 | <i>CWR²</i> | 0,5 |
| <i>bVD</i> | 0,8944 | <i>CRW</i> | 0,70710678 |
| <i>bDV²</i> | 0,2 | <i>bfc</i> | 0,96 |
| <i>bDV</i> | 0,4472 | | |

$C_{\pi Q}$ 0,6
 b_{wC} 0,8432
 A_{ne} 0,96
 e_{An} 0,35712

VFP 0,032
 VFP 0,17888
 CVF 0,9838699

Dritter Theil.

Liste der Formeln,

die auf die Figur angewendet, oder anwendbar sind.

O b e r f l ä c h e.

In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Oberfläche gleich dem *Oberfläche.* Quadrate der Hypothenuse; multiplicirt mit dem halben Producte der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

NB. Kürze halber werde ich mich öfters des Ausdrucks *anliegenden Sinusse*, statt, *Sinusse der anliegenden Winkel*; wie auch des Ausdrucks: *gegenüberstehende* und *eingeschlossene Sinusse*, statt *Sinusse der gegenüberstehenden oder der eingeschlossenen Winkel*, bedienen.

In jedem Dreyecke ist die Oberfläche gleich dem Quadrate einer jeden Seite, multiplicirt mit dem halben Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, dividirt durch den dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

In jedem $\triangle$ ist die Oberfläche gleich einer jeden Seite, multiplicirt mit dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, multiplicirt mit dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels.

In jedem $\triangle$ ist die Oberfläche gleich der Summe der Quadraten der beyden Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit dem halben Producte der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

$\triangle$. Die Oberfläche ist gleich dem Producte der Seiten, multiplicirt mit der Senkrechte auf was immer für eine Seite, oder auf ihre Verlängerung, dividirt durch das doppelte Product der beyden übrigen Seiten.

Oberflä-
che.

△. Die Oberfläche ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch den doppelten Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Die doppelte Oberfläche ist gleich dem Producte der drey Seiten, multiplicirt mit der Summe der drey Sinusse, dividirt durch die Summe der drey Seiten.

△. Die Oberfläche ist gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der halben Summe der drey Sinusse.

△. Die Oberfläche ist gleich der Senkrechte auf eine jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, multiplicirt mit dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

△. Die Oberfläche ist gleich dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Producte der drey Seiten, dividirt durch das Quadrat des Durchmessers des umschriebenen Zirkels.

℞. Die Oberfläche ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, multiplicirt mit dem halben Cosinus, dividirt durch die Secante.

℞. Die Oberfläche ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse, multiplicirt mit der Hälfte einer anderen Seite, dividirt durch den Durchmesser des der Hypothenuse und dieser nähmlichen doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels.

△. Die doppelte Oberfläche, dividirt durch das Product des Durchmessers des umschriebenen Zirkels mit der halben Summe der drey Sinusse, ist gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

△. Zwey Dreyecke, welche zwey Seiten respective gleich haben, und deren Durchmesser der umschriebenen Zirkel gleich sind, haben auch ihre dritten Seiten im Verhältnisse mit ihren Oberflächen.

△. In zwey Dreyecken, deren zwey Seiten respective gleich sind, wie auch ihre Oberflächen, stehen die dritten Seiten im Verhältnisse mit den Durchmessern der umschriebenen Zirkel.

℞. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Oberfläche gleich

einer jeden Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit einer geraden Linie, vom Mittelpuncte der Hypothenuse bis zum Mittelpuncte dieser Seite gezogen. Ober-
flächen.

Und diese gerade Linie wird senkrecht auf diese Seite stehen, wird parallel mit der gegenüberstehenden Seite, und die Hälfte dieser letzten Seite seyn.

Δ . Die Oberfläche ist gleich einer jeden Seite, multiplicirt mit einer geraden Linie, vom Mittelpuncte dieser Seite bis zum Mittelpuncte einer anderen Seite gezogen; das Product multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, so diese Linie auf die als Factor dienende Seite macht.

Und diese gerade Linie wird mit der gegenüberstehenden Seite parallel, und die Hälfte dieser Seite seyn.

Hypothenuse.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das halbe Product der an der Hypothenuse liegenden Sinusse. Hypothe-
nuse.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit einer jeden Seite, dividirt durch den dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich einer jeden Seite, dividirt durch den dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse, dividirt durch eine jede der übrigen Seiten, ist gleich dem Durchmesser des der Hypothenuse und der dritten doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich dem Durchmesser des der Hypothenuse und ein jeder der übrigen doppelt verlängerten Seiten umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem, der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich dem Quadrate der am Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, liegenden Seite; das Quadrat dividirt durch den nähmlichen Abschnitt.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich der Senkrechte auf die Hy-

Hypothenuse. pothenuse, dividirt durch das Product der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

R. Die Hypothenuse ist gleich einer jeden geraden Linie, die von der Spitze des rechten Winkels auf einen beliebigen Punct der Hypothenuse, oder ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels, so diese gerade auf die Hypothenuse oder auf ihre Verlängerung macht, dividirt durch das Product der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

R. Die Hypothenuse, sammt der doppelten Senkrechte auf die Hypothenuse, sind gleich der Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit der Summe der dieser Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

R. Die Hypothenuse ist gleich den beyden Seiten des rechten Winkels, dividirt durch die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

R. Die Hypothenuse ist gleich der Senkrechte auf die Hypothenuse, multiplicirt mit dem Quadrate der Hypothenuse, dividirt durch das Product der beyden Seiten des rechten Winkels.

R. Die Hypothenuse ist gleich dem Producte der beyden Seiten des rechten Winkels, dividirt durch die Senkrechte auf die Hypothenuse.

R. Das doppelte Quadrat der Hypothenuse ist gleich dem Quadrate der Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, mehr dem Quadrate der Differenz dieser beyden Seiten.

R. Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die Senkrechte auf die Hypothenuse.

R. Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch eine gerade Linie, die vom Scheitel auf einen beliebigen Punct der Hypothenuse, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist; diese Linie multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels.

R. Die doppelte Hypothenuse ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die Oberfläche.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich einer Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit der doppelten andern Seite, dividirt durch den Sinus eines dieser letzten Seite gegenüberstehenden doppelten Winkels. Hypothe-
nuse.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich dem Quadrate der Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, weniger dem doppelten Producte dieser beyden Seiten.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich einer Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit dem dieser Seite gegenüberstehenden Sinus, mehr der andern Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit dem ihr gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Die Hypothenuse ist gleich der Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, dividirt durch die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

Δ . Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich dem Durchmesser des der Hypothenuse und einer jeden der übrigen doppelt verlängerten Seiten umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Oberfläche, dividirt durch die Hälfte der nähmlichen nicht verlängerten Seite.

Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Δ . Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich einer jeden Seite, dividirt durch den gegenüberstehenden Sinus. Durchmes-
ser des um-
schriebe-
nen Zir-
kels.

Δ . Das Quadrat des Durchmessers des umschriebenen Zirkels ist gleich dem Producte jeder zwey Seiten, dividirt durch das Product der diesen Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

Δ . Das Quadrat des Durchmessers des umschriebenen Zirkels ist gleich dem Producte zweyer Seiten, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, dividirt durch die Senkrechte auf die dritte Seite.

Δ . Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Senkrechte auf einer jeden Seite oder auf ihre Verlängerung, dividirt durch das Product der an dieser Seite liegenden Sinusse.

Δ . Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich

⊙
Durch-
messer.

dem Producte zweyer Seiten, dividirt durch die Senkrechte auf die dritte Seite.

△. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich einer jeden geraden Linie, die von der Spitze auf eine beliebige Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, multiplicirt mit dem Sinus des Auffalls-Winkels, dividirt durch das Product der an dieser Seite liegenden Sinusse.

△. Isoscèle. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich dem Quadrate eines der gleichen Schenkel, dividirt durch die Senkrechte auf die ungleiche Seite.

△. Der Halbmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Oberfläche, dividirt durch eine jede Seite, diese Seite vorher multiplicirt mit dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse.

△. Der Durchmesser des zwey Halbmessern umschriebenen Zirkels ist gleich dem Durchmesser des Bogens, multiplicirt mit dem Sinus eines einfachen Bogens, dividirt durch den Sinus eines doppelten Bogens.

△. Der Durchmesser des zwey Halbmessern umschriebenen Zirkels ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, dividirt durch den Cosinus.

△. Isoscèle. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels, dividirt durch einen der gleichen Schenkel, ist gleich der Einheit, dividirt durch den Quotienten aus der Division der Senkrechte auf die ungleiche Seite durch die gleiche Seite.

△. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die doppelte Oberfläche.

△. Isoscèle. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch das Product der an dieser Seite liegenden Sinusse.

△. Isoscèle. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch das Quadrat des Sinus einer dergleichen Winkel.

△. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Summe von zwey oder drey Seiten dividirt durch die Summe der dieser Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

△. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der

Differenz zweyer Seiten, dividirt durch die Differenz der gegenüberstehenden Sinusse.

⊙
Durch-
messer.

Δ. Isoscèle. Der Durchmesser des umschriebenen Zirkels ist gleich der Secante des der ungleichen Seite gegenüberstehenden halben Winkels.

℞. Der Durchmesser des der Hypothenuse und einer der übrigen doppelt verlängerten Seiten umschriebenen Zirkels ist gleich der Hypothenuse, dividirt durch den, der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus.

℞. Der Durchmesser des der Hypothenuse und einer andern doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels, ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse, dividirt durch die dritte Seite.

℞. Der Durchmesser des der Hypothenuse und einer jeden andern doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels ist gleich der dritten Seite, dividirt durch das Quadrat des ihr gegenüberstehenden Sinus.

℞. Der Durchmesser des der Hypothenuse und einer andern doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels, ist gleich der Hälfte dieser Seite, multiplicirt mit dem Quadrate der Hypothenuse, dividirt durch die Oberfläche.

Δ. Der Halbmesser des einem gleichseitigen Dreyecke umschriebenen Zirkels ist gleich dem Durchmesser des demselben Dreyecke eingeschriebenen Zirkels.

Seiten.

Δ. Jede Seite ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product der an dieser Seite liegenden Sinusse, das Product vorher multiplicirt mit dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels.

Seiten.

℞. Jede Seite ist gleich dem ihr gegenüberstehenden Sinus, multiplicirt mit der Hypothenuse.

Δ. Jede Seite ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem der Seite gegenüberstehenden Sinus.

℞. Jede Seite ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse, dividirt durch den Durchmesser des der Hypothenuse und der dritten doppelten verlängerten Seite umschriebenen Zirkels.

Seiten.

Δ Isoscèle. Das Quadrat der ungleichen Seite ist gleich den beyden gleichen Seiten, multiplicirt mit dem an der ungleichen Seite liegenden Abschnitte, so die Senkrechte auf die gleiche Seite macht.

Δ . Das Quadrat der am Abschnitte liegenden Seite, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit diesem Abschnitte.

Δ . Die am Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, liegende Seite, ist gleich diesem Abschnitte, dividirt durch den der Seite gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Jede Seite ist gleich der Senkrechte auf eine andere Seite oder auf ihre Verlängerung, dividirt durch den Sinus des an dieser ersten Seite liegenden und der Senkrechten gegenüberstehenden Winkels.

Δ . Jede Seite ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product einer beliebigen geraden Linie, die von der Spitze auf diese Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, mit dem halben Sinus des Auffallswinkels, so diese Linie auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung macht.

Δ . Das Quadrat jeder Seite ist gleich der Oberfläche, multiplicirt mit dem dieser Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch das halbe Product der an dieser Seite liegenden Sinusse.

Δ . Jede Seite ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product aus der Multiplication des Halbmessers des umschriebenen Zirkels mit dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse.

Δ . Isoscèle. Das Quadrat des gleichen Schenkels ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Senkrechte auf die ungleiche Seite.

Δ . Das Quadrat jeder Seite ist gleich der Oberfläche, multiplicirt mit dem dieser Seite gegenüberstehenden doppelten Sinus, dividirt durch das Product der an dieser Seite liegenden Sinusse.

Δ . Isoscèle. Die am Abschnitte, so die Senkrechte auf den gleichen Schenkel macht, liegende Seite, ist gleich diesem Ab-

schnitte, dividirt durch den Cosinus des zwischen dieser Seite und dem Abschnitte eingeschlossenen Winkels. Seiten.

Δ . Jede doppelte Seite eines rechten Winkels ist gleich dem Sinus des Winkels, doppelten desjenigen, der dieser Seite gegenüber steht, multiplicirt mit dem Quadrate der Hypothenuse, dividirt, durch die andere Seite des rechten Winkels.

Δ . Isoscèle. Die ungleiche Seite ist gleich dem ihr gegenüberstehenden Sinus, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Δ . Isoscèle. Das Quadrat der gleichen Seite ist gleich dem Quadrate der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch das Product der an der ungleichen Seite liegenden Sinusse.

Δ . Das Quadrat der am Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, liegenden Seite ist gleich diesem Abschnitte, multiplicirt mit dem Quadrate der am anderen Abschnitte liegenden Seite, das Product dividirt durch diesen anderen Abschnitt.

Δ . Isocèle. Die gleiche Seite mehr die Senkrechte auf die gleiche Seite, ist gleich der Summe der Senkrechte auf die ungleiche Seite und der halben ungleichen Seite; multiplicirt mit der Summe des Sinus des der gleichen Seite gegenüberstehenden Winkels, und des Sinus des der ungleichen Seite gegenüberstehenden halben Winkels.

Δ . Isoscèle. Die gleiche Seite ist gleich der Senkrechte auf die gleiche Seite, dividirt durch den Sinus des zwischen den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkels.

Δ . Isoscèle. Die ungleiche Seite ist gleich dem ihr gegenüberstehenden Sinusse, multiplicirt mit dem Quadrate der gleichen Seite, dividirt durch die Senkrechte auf die ungleiche Seite.

Δ . Isoscèle. Die gleiche Seite ist gleich der Senkrechte auf die gleiche Seite, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, dividirt durch die ungleiche Seite.

Δ . Die am Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, liegende Seite verhält sich zum Abschnitte, multiplicirt mit dem Producte der am Abschnitte liegenden Sinusse, wie die am anderen Abschnitte liegende Seite sich zu diesem

Seiten. Abschnitte, multiplicirt mit dem Producte der an diesem Abschnitte liegenden Sinusse, verhält.

Δ . Jede Seite ist gleich der Summe der beyden übrigen Seiten, multiplicirt mit dem der ersten Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch die Summe der den beyden übrigen Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

$\mathcal{R}$. Jede Seite des rechten Winkels ist gleich der Senkrechte auf die Hypothenuse, multiplicirt mit der Hypothenuse, dividirt durch die andere Seite des rechten Winkels.

Δ . Jede Seite ist gleich der Senkrechte auf eine andere Seite, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung, multiplicirt mit der ersten Seite, dividirt durch das Product des ihr gegenüberstehenden Sinus mit der dritten Seite.

Δ . Jede Seite ist gleich einer beliebigen geraden Linie, gezogen von der Spitze des Dreyeckes auf eine der andern Seiten, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung, multiplicirt mit dem Sinusse des Auffallswinkels, multiplicirt mit der ersten Seite, dividirt durch das Product des ihr gegenüberstehenden Sinus mit der dritten Seite.

Δ . Jede Seite ist gleich einer geraden Linie, gezogen von der Spitze des Dreyeckes auf eine der anderen Seiten, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung, multiplicirt mit dem Producte des Auffallswinkels und des Durchmessers des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels, dividirt durch die dritte Seite.

Δ . Isoscèle. Das Quadrat der gleichen Seite ist gleich der Senkrechte auf die ungleiche Seite, multiplicirt mit der ungleichen Seite: mehr dem Quadrate der Differenz zwischen der Senkrechte auf die ungleiche Seite und der halben gleichen Seite.

$\mathcal{R}$. Jede Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit dem ihr gegenüberstehenden Sinus, mehr die andere Seite des rechten Winkels, multiplicirt mit dem ihr gegenüberstehenden Sinus, ist gleich der Hypothenuse.

$\mathcal{R}$. Das Quadrat jeder Seite des rechten Winkels ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse, multiplicirt mit dem Quadrate des dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

Δ . Jede Seite, multiplicirt mit dem ihr gegenüberstehenden

Sinus, ist gleich einer geraden Linie, die von der Spitze auf diese Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen ist, multiplicirt mit dem Producte des Auffalls-Sinus und des Quadrates dieser Seite, dividirt durch das Product der beyden übrigen Seiten.

△. Jede Seite ist gleich dem Producte der beyden übrigen, multiplicirt mit dem der ersten Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch das Product einer beliebigen geraden Linie (gezogen von der Spitze auf diese erste Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung) mit dem Sinusse des Auffallswinkels.

Summe der Seiten.

△. Die Summe von zwey oder drey Seiten ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Summe der ihnen gegenüberstehenden Sinusse.

△. Die Summe der Senkrechte und des an einer Seite liegenden Abschnittes, ist gleich dieser Seite, multiplicirt mit der Summe der an ihr liegenden Sinusse.

℞. Die Summe der beyden Seiten des rechten Winkels ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das halbe Product der diesen beyden Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

℞. Die Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit der Summe der ihnen gegenüberstehenden Sinusse, ist gleich der Summe der Hypothenuse, mehr der doppelten Senkrechte auf die Hypothenuse.

℞. Die Summe der beyden Seiten des rechten Winkels ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit der Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

△. Die Summe zweyer Seiten ist gleich der dritten Seite, multiplicirt mit der Summe der den zwey ersten Seiten gegenüberstehenden Sinusse, dividirt durch den der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus.

△. Die Summe der Seiten ist gleich der Summe der Sinusse, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

*Summe der
Seiten.*

△. Die Summe zweyer Seiten ist gleich der Summe der diesen Seiten gegenüberstehenden Sinusse, multiplicirt mit einer beliebigen Seite, dividirt durch den dieser Seite gegenüberstehenden Sinus.

△. Die halbe Summe der drey Sinusse ist gleich dem einer jeden Seite gegenüberstehenden Sinus, multiplicirt mit der Senkrechte auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung, dividirt durch den Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

Differenz der Seiten.

*Differenz
der Seiten.*

△. Die Differenz zweyer Seiten ist gleich der Differenz der Senkrechten auf diese Seiten oder auf ihre Verlängerungen, dividirt durch den Sinus des eingeschlossenen Winkels.

℞. Die Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels ist gleich der Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, dividirt durch die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

△. Die Differenz zweyer Seiten ist gleich der Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte auf die dritte Seite macht, multiplicirt mit dem der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch die Summe der den beyden übrigen Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

℞. Das Quadrat der Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels, mehr das Quadrat ihrer Summe, ist gleich dem doppelten Quadrate der Hypothenuse.

△. Die Differenz zweyer Seiten ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Differenz der diesen Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

℞. Die Differenz der Seiten des rechten Winkels ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit der Differenz der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

△. Die Differenz zweyer Seiten ist gleich der Differenz der diesen Seiten gegenüberstehenden Sinusse, multiplicirt mit der dritten Seite, dividirt mit dem ihr gegenüberstehenden Sinus.

△. Die Differenzen der drey Seiten sind gleich den Differen-

zen der drey Sinusse, multiplicirt mit der Summe der drey Seiten, dividirt durch die Summe der drey Sinusse. *Differenz
der Seiten.*

Δ . Die halbe Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels ist gleich dem Abstände zwischen dem Mittelpuncte der Hypothenuse und dem Einschnittspuncte der Senkrechte auf die Hypothenuse, dividirt durch die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

Δ . Die halbe Differenz zweyer Seiten ist gleich dem Abstände des Mittelpunctes der dritten Seite von der Senkrechte auf die dritte Seite, multiplicirt mit dem der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch die Summe der an der dritten Seite liegenden Sinusse.

Δ . Die Differenz zwischen dem Quadrate der Summen der beyden Seiten des rechten Winkels und ihrem doppelten Producte ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse.

Producte der Seiten.

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Senkrechte auf die dritte Seite. *Producte
der Seiten.*

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Producte der diesen Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Senkrechte auf die dritte Seite.

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich der doppelten Oberfläche, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich der doppelten Oberfläche, multiplicirt mit dem Producte zweyer Seiten, dividirt durch die Senkrechte auf die dritte Seite.

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich dem Quadrate der Senkrechte auf die dritte Seite, dividirt durch das Product der den ersten Seiten gegenüberstehenden Sinusse.

*Producte
der Seiten.*

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse, multiplicirt mit der Senkrechte auf die Hypothenuse.

Δ . Das Product der Seiten des rechten Winkels ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit der Senkrechte auf die Hypothenuse.

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich der Oberfläche, multiplicirt mit dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Δ LP. In jedem rechtwinkeligen Dreyecke, dessen Seiten proportionirt sind, ist das Product der Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit 25, gleich dem Quadrate der Summe der drey Seiten, dividirt durch das Product der drey Sinusse.

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich der doppelten Oberfläche, multiplicirt mit der Summe der drey Seiten, dividirt durch die Summe der drey Sinusse.

Δ . Das Product der drey Seiten, dividirt durch das Product des Durchmessers des umschriebenen Zirkels mit dem einer beliebigen Seite gegenüberstehenden Sinus, ist gleich der Senkrechte auf diese Seite.

Δ . Das Product der drey Seiten ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Oberfläche, dividirt durch den Halbmesser des umschriebenen Zirkels.

Δ . Das doppelte Product der Seiten des rechten Winkels, mehr dem Quadrate ihrer Differenz, ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse.

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich der halben Summe der drey Sinusse, dividirt durch den Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels, multiplicirt mit dem Producte der Durchmesser des umschriebenen und des eingeschriebenen Zirkels.

Δ . Das Product zweyer Seiten ist gleich der dritten Seite, multiplicirt mit der Senkrechte auf diese dritte Seite, dividirt durch den der dritten Seite gegenüberstehenden Sinus.

△. Das Product der drey Seiten ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der halben Summe der drey Sinusse.

*Producte
der Seiten.*

S e n k r e c h t e.

△. Die Senkrechte auf jeder Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse.

*Senk-
rechte.*

△. Die Senkrechte auf jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich einer jeden anderen Seite, multiplicirt mit dem Sinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels.

△. Die Senkrechte auf eine jede Seite ist gleich dieser Seite, multiplicirt mit dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, dividirt durch den Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate der gleichen Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate der gleichen Seite, dividirt durch die ungleiche Seite, vorher dividirt durch den ihr gegenüberstehenden Sinus.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt mit dem Quadrate des der gleichen Seite gegenüberstehenden Sinus, ist gleich der ungleichen Seite, dividirt durch den Sinus des von beyden gleichen Seiten eingeschlossenen Winkels.

△. Die Senkrechte auf jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich dem Producte der beyden übrigen Seiten, multiplicirt mit der doppelten Oberfläche, dividirt durch das Product der drey Seiten.

△. Das Quadrat der Senkrechte auf jede Seite, ist gleich dem Producte der beyden übrigen Seiten, multiplicirt mit dem Producte der an der ersten Seite liegenden Sinusse.

Senkrechte.

△. Isoscèle. Das Quadrat der Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate der gleichen Seite, multiplicirt mit dem Producte der an der ungleichen Seite liegenden Sinusse.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die gleiche Seite, mehr die gleiche Seite, ist gleich der Summe der Senkrechte auf die ungleiche Seite, und der halben ungleichen Seite, multiplicirt mit der Summe des Sinus des der gleichen Seite gegenüberstehenden Winkels und des Sinus des der ungleichen Seite gegenüberstehenden halben Winkels.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Producte der an ihr liegenden Sinusse, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate des Sinus eines der gleichen Winkel, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate des Sinus eines der gleichen Winkel, multiplicirt mit der ungleichen Seite, dividirt mit dem der ungleichen Seite gegenüberstehenden Sinus.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die gleiche Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich dem Sinusse des zwischen den beyden gleichen Seiten eingeschlossenen Winkels, multiplicirt mit der gleichen Seite.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite ist gleich dem Quadrate der gleichen Seite, multiplicirt mit dem der ungleichen Seite gegenüberstehenden Sinus, dividirt durch die ungleiche Seite.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die gleiche Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich der gleichen Seite, multiplicirt mit der gleichen Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Die Senkrechte auf jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich dem Producte der beyden übrigen Seiten, dividirt durch eine jede Seite, vorher dividirt mit dem ihr gegenüberstehenden Sinus.

△. Isoscèle. Die Senkrechte auf die ungleiche Seite, multiplicirt mit der ungleichen Seite, mehr das Quadrat der Differenz zwischen der Senkrechte auf die ungleiche Seite, und der halben ungleichen Seite, ist gleich dem Quadrate der gleichen Seite.

R. Die Senkrechte auf die Hypothenuse ist gleich dem Producte der Seiten des rechten Winkels, dividirt durch die Hypothenuse. *Senkrechte*

Δ. Die Senkrechte auf jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich einer beliebigen geraden Linie, gezogen von der Spitze auf diese nähmliche Seite, oder auf ihre unbestimmte Verlängerung, multiplicirt mit dem Sinus des Auffallswinkels.

R. Die Senkrechte auf die Hypothenuse ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch das Quadrat der Hypothenuse.

Δ. Die Senkrechte auf eine jede Seite, oder ihre Verlängerung, ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch das Product aus der Multiplication des Quadrates des Durchmessers des umschriebenen Zirkels mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels.

Δ. Die Senkrechte auf eine jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, ist gleich dem Producte der beyden übrigen Seiten, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Durchmesser.

Δ. Der Durchmesser eines Bogens ist gleich dem Durchmesser des zwey Halbmessern umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Sinus eines doppelten Bogens, dividirt durch den Sinus eines einfachen Bogens. *Durchmesser*

Δ. Der Durchmesser ist gleich dem Quadrate der Sehne eines einfachen Bogens, dividirt durch seinen Sinus versus.

Δ. Der Durchmesser ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch den Sinus versus.

NB. Unter Hypothenuse der Sinusse verstehe ich die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreyeckes, dessen beyde Schenkel des rechten Winkels respective der Sinus und der Sinus versus eines Bogens, oder eines Winkels sind.

Δ. Der Durchmesser ist gleich der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch den Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels.

Δ. Der Durchmesser ist gleich dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Cosinus, dividirt mit dem Halbmesser.

*Durch-
messer.*

△. Der Durchmesser ist gleich dem Sinus versus, dividirt durch das Quadrat des Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels.

△. Der Durchmesser ist gleich der Secante des einfachen Bogens, multiplicirt mit dem Sinus des doppelten Bogens, dividirt durch den Sinus des einfachen Bogens.

△. Der Durchmesser ist gleich dem doppelten Sinus des doppelten Bogens, multiplicirt mit der Tangente des einfachen Bogens, dividirt durch den Sinus versus des doppelten Bogens.

Abschnitt.

Abschnitt.

△. Isoscèle. Der grössere Abschnitt (so die Senkrechte auf die gleiche Seite macht) mehr die gleiche Seite, beyde multiplicirt mit dem kleineren Abschnitte, sind gleich dem Quadrate der Senkrechte auf die gleiche Seite.

△. Isoscèle. Der an der ungleichen Seite liegende Abschnitt, so die Senkrechte auf die gleiche Seite macht, ist gleich dem Quadrate der ungleichen Seite, dividirt durch die doppelte gleiche Seite.

℞. Der Abschnitt, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, ist gleich der an diesem Abschnitte liegenden Seite, multiplicirt mit dem diesem Abschnitte gegenüberstehenden Sinusse.

℞. Der Abschnitt, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, ist gleich dem Quadrate der an diesem Abschnitte liegenden Seite, multiplicirt mit dem andern Abschnitte, dividirt durch das Quadrat der an ihm liegenden Seite.

℞. Der Abschnitt (so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht), multiplicirt mit dem Producte der an diesem Abschnitte liegenden Sinusse, ist gleich der an diesem Abschnitte liegenden Seite, multiplicirt mit dem Producte aus der Multiplication des anderen Abschnittes mit dem Producte der an ihm liegenden Sinusse, dividirt durch die an diesem zweyten Abschnitte liegende Seite.

△. Der Abschnitt, den eine beliebige gerade Linie, von der Spitze auf eine Seite gezogen, macht, ist gleich der an diesem

Abschnitte liegenden Seite, multiplicirt mit dem diesem Abschnitt- *Abschnitt.*
te gegenüberstehenden Sinus; dividirt durch den Sinus des Auf-
fallswinkels.

Differenz der Abschnitte.

Δ . Die Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, ist gleich der Differenz der Seiten des rech- *Differenz*
ten Winkels, multiplicirt mit der Summe der an der Hypothe- *der Ab-*
nuse liegenden Sinusse. *schnitte,*

Δ . Die Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte auf je-
de Seite macht, ist gleich der Differenz der beyden übrigen Sei-
ten, multiplicirt mit der Summe der an der ersten Seite liegen-
den Sinusse, dividirt durch den der ersten Seite gegenüberste-
henden Sinus.

Δ . Isoscèle. Der Abschnitt, so die Senkrechte auf die gleiche
Seite macht, ist gleich der an diesem Abschnitte liegenden Sei-
te, multiplicirt mit dem diesem Abschnitte gegenüberstehenden
Sinus.

Sinus.

Δ . Der Sinus des jeder Seite gegenüberstehenden Winkels *Sinus.*
ist gleich dieser Seite, dividirt durch die Hypothenuse.

Δ . Der jeder Seite gegenüberstehende Sinus ist gleich die-
ser Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen
Zirkels.

Δ . Der jeder Seite des rechten Winkels gegenüberstehen-
de Sinus ist gleich der Hypothenuse, dividirt durch den Durch-
messer des der Hypothenuse und der anderen doppelt verlänger-
ten Seite umschriebenen Zirkels.

Δ . Der Sinus des doppelten Bogens ist gleich dem Sinusse
des einfachen Bogens, multiplicirt mit dem Durchmesser, divi-
dirt durch den Durchmesser des dem Halbmesser und dem dop-
pelten Sinusse des einfachen Bogens umschriebenen Zirkels.

Δ . Der Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Win-
kels ist gleich dem Sinus versus, dividirt durch die Hypothenu-
se der Sinusse.

Sinus. Δ . Der dem Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, gegenüberstehende Sinus, ist gleich diesem Abschnitte, dividirt durch die an ihm liegende Seite.

Δ . Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinus versus eines doppelten Bogens, dividirt durch die Sehne eines einfachen Bogens.

Δ . Der, einer jeden Seite gegenüberstehende Sinus, ist gleich dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, multiplicirt mit dieser Seite, dividirt durch die Senkrechte auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung.

Δ . Der Sinus des zwischen zwey Seiten eingeschlossenen Winkels ist gleich der Differenz der Senkrechten auf diese Seiten oder auf ihre Verlängerungen, dividirt durch die Differenz der Seiten.

Δ . Der Sinus des Auffallswinkels, so eine gerade Linie, von der Spitze auf eine beliebige Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung gezogen, macht, ist gleich dem Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Zirkels, dividirt durch diese Linie.

Δ . Der einer jeden Seite gegenüberstehende Sinus, ist gleich dem halben Producte der an dieser Seite liegenden Sinusse, multiplicirt mit dem Quadrate dieser Seite, dividirt durch die Oberfläche.

Δ . Das Quadrat eines jeden Sinus ist gleich dem Producte aus der Multiplication des Cosinus, mit der Summe des Sinus versus und der Extrasecante.

Δ . Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinus versus eines doppelten Bogens, multiplicirt mit dem Halbmesser, dividirt durch die Hypothenuse der Sinusse eines doppelten Bogens.

Δ . Der Sinus ist gleich der Summe des Sinus versus und der Extrasecante, multiplicirt mit dem Halbmesser, dividirt durch die Tangente.

Δ . Der Sinus eines doppelten Bogens ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit dem Sinus versus eines doppelten Bogens, dividirt durch die Tangente eines einfachen Bogens.

Δ . Der Sinus eines doppelten Bogens ist gleich dem Qua-

drate des Sinus eines einfachen Bogens, dividirt durch die halbe Tangente des einfachen Bogens. *Sinus.*

△. Der doppelte Sinus eines doppelten Bogens ist gleich dem Sinus versus des doppelten Bogens, multiplicirt mit dem Durchmesser, dividirt durch die Tangente des einfachen Bogens.

△. Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinus eines doppelten Bogens, multiplicirt mit der Summe des Sinus versus und der Extrasecante des einfachen Bogens, dividirt durch den Sinus versus des doppelten Bogens.

△. Der Sinus des einer Seite gegenüberstehenden Winkels ist gleich der Summe der Sinusse der an dieser Seite liegenden Winkel, multiplicirt mit der Differenz der beyden anderen Seiten, dividirt durch die Differenz der durch die Senkrechte auf die erste Seite gemachten Abschnitte.

△. Der Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels ist gleich dem Sinus versus, dividirt durch die Hypothenuse der Sinusse.

△. Der Sinus des einer Seite gegenüberstehenden Winkels ist gleich dem Quadrate dieser Seite, multiplicirt mit dem halben Producte der Sinusse der an dieser Seite liegenden Winkel, dividirt durch die Oberfläche.

△. Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinusse eines doppelten Bogens, multiplicirt mit dem Durchmesser des dem Halbmesser und der Sehne des doppelten Bogens umschriebenen Zirkels, dividirt durch den Durchmesser des Bogens.

△. Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinusse eines doppelten Bogens, multiplicirt mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers, dividirt durch den Cosinus des einfachen Bogens.

△. Der Sinus des dem Abschnitte, so die Senkrechte auf eine Seite macht, gegenüberstehenden Winkels ist gleich diesem Abschnitte, dividirt durch die an diesem Abschnitte liegende Seite.

△. Der Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels ist gleich der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch den Durchmesser.

△. Isoscèle. Die Summe des Sinus, des der gleichen Seite gegenüberstehenden Winkels, und des Sinus eines halben Winkels,

Sinus. der der ungleichen Seite gegenüber stehet, multiplicirt mit der Summe der Senkrechte auf die ungleiche Seite, und der halben ungleichen Seite, ist gleich der gleichen Seite, mehr der Senkrechte auf die gleiche Seite.

△. Isoscèle. Das Quadrat des Sinus des gleichen Winkels ist gleich der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch den Durchmesser des dem Dreyecke umschriebenen Zirkels.

△. Das Quadrat des Sinus, des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels ist gleich dem Sinus versus, dividirt durch den Durchmesser.

△. Isoscèle. Der Sinus des der ungleichen Seite gegenüberstehenden Winkels ist gleich der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch die gleiche Seite.

△. Isoscèle. Der Sinus des ungleichen Winkels ist gleich der ungleichen Seite, multiplicirt mit der Senkrechte auf die ungleiche Seite, dividirt durch das Quadrat der gleichen Seite.

△. Der Sinus eines doppelten Bogens ist gleich der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch den Durchmesser des dem Halbmesser und der Hypothenuse der Sinusse umschriebenen Zirkels.

△. Der Sinus des jeder Seite gegenüberstehenden Winkels, ist gleich der Summe der an dieser Seite liegenden Sinusse, multiplicirt mit dieser Seite, dividirt durch die Summe der übrigen Seiten.

△. Der Sinus des jeder Seite gegenüberstehenden Winkels ist gleich der halben Summe der Sinusse der an dieser Seite liegenden Winkel, multiplicirt mit der Differenz der übrigen Seiten, dividirt durch den Zwischenraum zwischen dem Mittelpuncte der ersten Seite und dem Puncte des Einschnittes der Senkrechte auf dieselbe Seite.

℞. Der Sinus eines jeden an der Hypothenuse liegenden doppelten Winkels ist gleich der doppelten gegenüberstehenden Seite, multiplicirt mit der andern recht schenkelligen Seite, dividirt durch das Quadrat der Hypothenuse.

℞. Das Quadrat des Sinus eines jeden an der Hypothenuse liegenden Winkels ist gleich der diesem Winkel gegenüberstehen-

den Seite, dividirt durch den Durchmesser des der Hypothenuse und der anderen doppelt verlängerten Seite umschriebenen Zirkels. *Sinus.*

△. Der dem Cosinus gegenüberstehende Sinus ist gleich dem Halbmesser, dividirt durch die Secante.

△. Der Sinus des dem Cosinus gegenüberstehenden Winkels ist gleich dem Producte der Tangente mit dem Cosinus, dividirt durch das Product des Sinus mit der Secante.

△. Der Sinus eines doppelten Bogens ist gleich zwey Sinussen eines einfachen Bogens, multiplicirt durch den Halbmesser, dividirt durch die Secante eines einfachen Bogens.

△. Der Sinus ist gleich der Tangente, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch die Extrasecante.

△. Der Sinus ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit der Tangente, dividirt durch die Secante.

△. Der Sinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinusse eines doppelten Bogens, multiplicirt mit der Secante des einfachen Bogens, dividirt durch den Durchmesser.

△. Die Hälfte des Sinus ist gleich der Secante, multiplicirt mit der Oberfläche, dividirt durch das Quadrat des Halbmessers.

△. Der Sinus des jeder Seite gegenüberstehenden Winkels ist gleich der Senkrechte auf diese Seite, multiplicirt mit dieser Seite, dividirt durch das Product der übrigen Seiten.

△. Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels, multiplicirt mit der Hälfte der Summe der drey Seiten, dividirt durch das Product der den Sinus einschließenden Seiten.

△. Das Quadrat des Sinus des zwischen der Hypothenuse der Sinusse und dem Sinus versus eingeschlossenen Winkels, ist gleich der Summe des Halbmessers und des Cosinus, dividirt durch den Durchmesser.

△. Der Sinus ist gleich der Tangente, multiplicirt mit dem Sinus des dem Cosinus gegenüberstehenden Winkels.

Product der Sinusse.

△. Das Product der Sinusse der an jeder Seiteliegenden Win- *Product der Sinusse.*

Product der Sinusse. kel ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product dieser Seite mit dem Halbmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Das Product der Sinusse der an der Hypothenuse liegenden Winkel ist gleich der doppelten Oberfläche, dividirt durch das Quadrat der Hypothenuse.

△. Das Product der Sinusse der an jeder Seite anliegenden Winkel ist gleich dem Producte der übrigen Seiten, dividirt durch das Quadrat des umschriebenen Zirkels.

△. Das Product der Sinusse der an jeder Seite liegenden Winkel ist gleich der Senkrechte auf diese Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Das Product der an jeder Seite liegenden Sinusse ist gleich der Senkrechte auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung, multiplicirt mit dem dieser Seite gegenüberstehenden Sinusse, dividirt durch diese Seite.

△. Das Product der an jeder Seite liegenden Sinusse ist gleich dem Sinusse des Auffallswinkels, so jede gerade von der Spitze herab gezogene Linie auf diese Seite oder auf ihre unbestimmte Verlängerung macht, multiplicirt mit dieser Linie, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Das Product der an jeder Seite liegenden Sinusse ist gleich der doppelten Oberfläche, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch das Quadrat dieser Seite.

△. Das Product der Sinusse der an der Hypothenuse liegenden Winkel ist gleich der doppelten Oberfläche, dividirt durch die Summe der Quadraten der beyden rechtschenkeligen Seiten.

△. Das Product der Sinusse der an jeder Seite liegenden Winkel ist gleich dem Quadrate der Senkrechte auf diese Seite, dividirt durch das Product der übrigen Seiten.

△. Isoscèle. Das Product der Sinusse der an der ungleichen Seite liegenden Winkel ist gleich dem Quadrate der Senkrechte, dividirt durch das Quadrat der gleichen Seite.

△. Isoscèle. Das Product der Sinusse der an der ungleichen Seite liegenden Winkel ist gleich der Senkrechte auf diese Seite, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Die Summe der Sinusse der an jeder Seite liegenden Winkel ist gleich dem Zwischenraume zwischen dem Mittelpuncte dieser Seite, und dem Einschnittspuncte, so die Senkrechte auf diese Seite macht, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch die halbe Differenz der übrigen Seiten. *Product der Sinusse.*

Differenz der Sinusse.

△. Die Differenz der Sinusse der zwey beliebigen Seiten gegenüberstehenden Winkel ist gleich der Summe derselben Sinusse, multiplicirt mit der Differenz dieser zwey Seiten, dividirt durch die Summe derselben Seiten. *Differenz der Sinusse.*

△. Die Differenz der Sinusse der zwey beliebigen Seiten gegenüberstehenden Winkel ist gleich der Differenz dieser zwey Seiten, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

△. Die Summe der Differenzen der drey Sinusse ist gleich der Summe der drey Sinusse, multiplicirt mit der Differenz der drey Seiten, dividirt durch die Summe der drey Seiten.

Summe der Sinusse.

△. Die Summe der Sinusse von zwey oder drey Winkeln ist gleich der Summe von zwey oder drey diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels. *Summe der Sinusse.*

△. Die Summe der Sinusse der an der Hypothenuse liegenden Winkel ist gleich der Summe der Senkrechte auf die Hypothenuse und des Abschnittes, so sie auf die Hypothenuse macht, dividirt durch die an diesem Abschnitte liegende Seite.

△. Die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse ist gleich der Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht, dividirt durch die Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels.

△. Die Summe der Sinusse der an jeder Seite liegenden Winkel ist gleich der Differenz der Abschnitte, so die Senkrechte

Summe der Sinusse.

auf die Seite macht, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch die Differenz der übrigen Seiten.

Δ . Die Summe der Sinusse der an der Hypothenuse liegenden Winkel, ist gleich der Summe der Hypothenuse und der doppelten Senkrechte auf die Hypothenuse, dividirt durch die Summe der beyden Seiten des rechten Winkels.

Δ . Die Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse ist gleich der Summe der beyden Seiten des rechten Winkels, dividirt durch die Hypothenuse.

Δ . Die Summe der Sinusse der an jeder Seite liegenden Winkel ist gleich der Summe der übrigen Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des der ersten Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch die erste Seite.

Δ . Die Summe von zwey Sinussen ist gleich der Differenz dieser zwey Sinusse multiplicirt mit der Summe der gegenüberstehenden Seiten, dividirt durch die Differenz dieser Seiten.

Δ . Die Summe der drey Sinusse ist gleich der Summe der drey Seiten, multiplicirt mit der doppelten Oberfläche, dividirt durch das Product der drey Seiten.

Δ . Die Summe der Sinusse der an der Hypothenuse liegenden Winkel ist gleich dem Zwischenraume zwischen dem Mittelpunkte der Hypothenuse und dem Punkte des Einschnittes, so die Senkrechte auf die Hypothenuse macht; dieser Zwischenraum dividirt durch die Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels.

Δ . Die halbe Summe der drey Sinusse ist gleich der Senkrechte auf jede Seite oder auf ihre Verlängerung multiplicirt mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch den Durchmesser des dem Dreyecke eingeschriebenen Zirkels.

Δ . Die halbe Summe der drey Sinusse ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product des Halbmessers des umschriebenen, mit dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

△. Die halbe Summe der Sinusse ist gleich dem Producte ^{Summe} zweyer beliebigen Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des ein- ^{der Sinusse} geschlossenen Winkels, dividirt durch das Product des Durchmessers des umschriebenen mit dem Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

△. Die Differenz der Sinusse zweyer Winkel ist gleich der Differenz der diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, dividirt durch den Durchmesser des umschriebenen Zirkels.

Sinus versus.

△. Der Sinus versus ist gleich der Hypothenuse der Sinusse, ^{Sinus ver-} multiplicirt mit dem Sinus des dem Sinus versus gegenüberste- ^{sus.} henden Winkels.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Quadrate des Sinus, dividirt durch die Summe des Cosinus und des Halbmessers.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch den Durchmesser.

△. Die Hälfte des Sinus versus eines doppelten Bogens ist gleich dem Quadrate des Sinus eines einfachen Bogens, dividirt durch den Halbmesser.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Quadrate des Sinus des dem Sinus versus gegenüberstehenden Winkels, multiplicirt mit dem Durchmesser.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Cosinus, multiplicirt mit der Extrasecante, dividirt durch den Halbmesser.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Sinus, multiplicirt mit der Extrasecante, dividirt durch die Tangente.

△. Der Sinus versus ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit der Extrasecante, dividirt durch die Secante.

Cosinus.

△. Der Cosinus ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit ^{Cosinus.} dem Sinus, dividirt durch die Tangente.

△. Der Cosinus ist gleich der Hälfte des Halbmessers, mul-

Cosinus. multiplicirt mit dem Sinus eines doppelten Bogens, dividirt durch den Sinus eines einfachen Bogens.

△. Der Cosinus ist gleich der Hälfte des Halbmessers, multiplicirt mit dem Durchmesser, dividirt durch den Durchmesser des dem Halbmesser und der Hypothenuse der Sinusse umschriebenen Zirkels.

△. Der Cosinus ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit dem Sinus des dem Cosinus gegenüberstehenden Winkels.

△. Der Cosinus ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch die Extrasecante.

△. Der doppelte Cosinus ist gleich dem Quadrate der Hypothenuse der Sinusse, dividirt durch die Extrasecante.

△. Der Cosinus ist gleich der Secante, multiplicirt mit dem Quadrate des Sinus, des dem Cosinus gegenüberstehenden Winkels.

△. Der Cosinus ist gleich der Summe des Halbmessers und des Cosinus, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch die Summe der Extrasecante und des Sinus versus.

△. Der Cosinus ist gleich dem Quadrate des Sinus, dividirt durch die Summe der Extrasecante, und des Sinus versus.

△. Der Cosinus eines einfachen Bogens ist gleich der halben Tangente des einfachen Bogens, multiplicirt mit dem Sinus des doppelten Bogens, dividirt durch die Summe des Sinus versus und der Extrasecante des einfachen Bogens.

△. Der Cosinus eines einfachen Bogens ist gleich dem Sinus des doppelten Bogens, multiplicirt mit dem Halbmesser, dividirt durch den doppelten Sinus des einfachen Bogens.

Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels.

△. Der Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels, ist gleich der Senkrechte auf jede Seite, oder auf ihre Verlängerung, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels, dividirt durch die halbe Summe der drey Sinusse.

△. Der Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels ist gleich der Oberfläche, dividirt durch den Halbmesser des umschriebenen Zirkels, dividirt durch die halbe Summe der drey Sinusse.

△. Der Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels ist gleich dem Producte zweyer beliebigen Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des zwischen diesen Seiten eingeschlossenen Winkels, dividirt durch das Product des Durchmessers des umschriebenen Zirkels mit der halben Summe der drey Sinusse.

*Durchmes-
ser des ein-
geschriebe-
nen Zir-
kels.*

△. Der Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels ist gleich der Oberfläche, dividirt durch das Product des Halbmessers des umschriebenen Zirkels mit der halben Summe der drey Sinusse.

△. Das Product des Durchmessers des eingeschriebenen Zirkels mit dem Durchmesser des umschriebenen, ist gleich der doppelten Oberfläche, dividirt durch die halbe Summe der drey Sinusse.

△. Der Durchmesser des eingeschriebenen Zirkels, multiplicirt mit dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen, ist gleich dem Producte der drey Seiten, dividirt durch die halbe Summe der drey Sinusse.

△. Der Durchmesser des einem gleichseitigen Dreyecke eingeschriebenen Zirkels, ist gleich dem Halbmesser des demselben Dreyecke umschriebenen Zirkels.

Abstand.

Der Abstand des Schwerpunctes des halben Umkreises vom Mittelpuncte, ist gleich dem Umkreise, dividirt durch die Elemente.

△. Der Abstand zwischen den beyden Puncten der Durchschnitte, so die Secante eines einfachen Bogens auf den Sinus eines doppelten Bogens und auf den doppelten Sinus eines einfachen Bogens, macht, ist gleich der Summe des Sinus versus und der Extrasecante des einfachen Bogens.

△. Der Abstand des Mittelpunctes der Hypothenuse vom Einschnittspuncte der Senkrechte auf die Hypothenuse ist gleich der halben Differenz der beyden Seiten des rechten Winkels, multiplicirt mit der Summe der an der Hypothenuse liegenden Sinusse.

Abstand.

△. Der Abstand des Mittelpunctes einer jeden Seite vom Einschnittspuncte der Senkrechte auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung, ist gleich der halben Differenz der zwey übrigen Seiten, multiplicirt mit der Summe der an der ersten Seite liegenden Sinusse, dividirt durch den Sinus des dieser Seite gegenüberstehenden Winkels.

Extrasecante.

*Extrase-
cante.*

△. Die Extrasecante ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch den Cosinus.

△. Die Extrasecante ist gleich der Tangente, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch den Sinus.

△. Die Extrasecante ist gleich der Secante, multiplicirt mit dem Sinus versus, dividirt durch den Halbmesser.

△. Die Extrasecante, mehr des Sinus versus eines einfachen Bogens, ist gleich dem Abstände zwischen den beyden Puncten der Durchschnitte, so die Secante eines einfachen Bogens auf den Sinus eines doppelten Bogens, und auf den doppelten Sinus eines einfachen Bogens macht.

△. Die Extrasecante ist gleich dem Quadrate der Hypothense der Sinusse, dividirt durch den doppelten Cosinus.

Zirkelbogen.

*Zirkelbo-
gen.*

O. Jeder Zirkelbogen, dessen Sehne die Sehne ist eines regelmäßigen Vieleckes, ist gleich der Quadratwurzel der Elemente, multiplicirt mit dem Durchmesser des dem Vielecke umschriebenen Zirkels, dividirt durch die Anzahl der Seiten des Vieleckes.

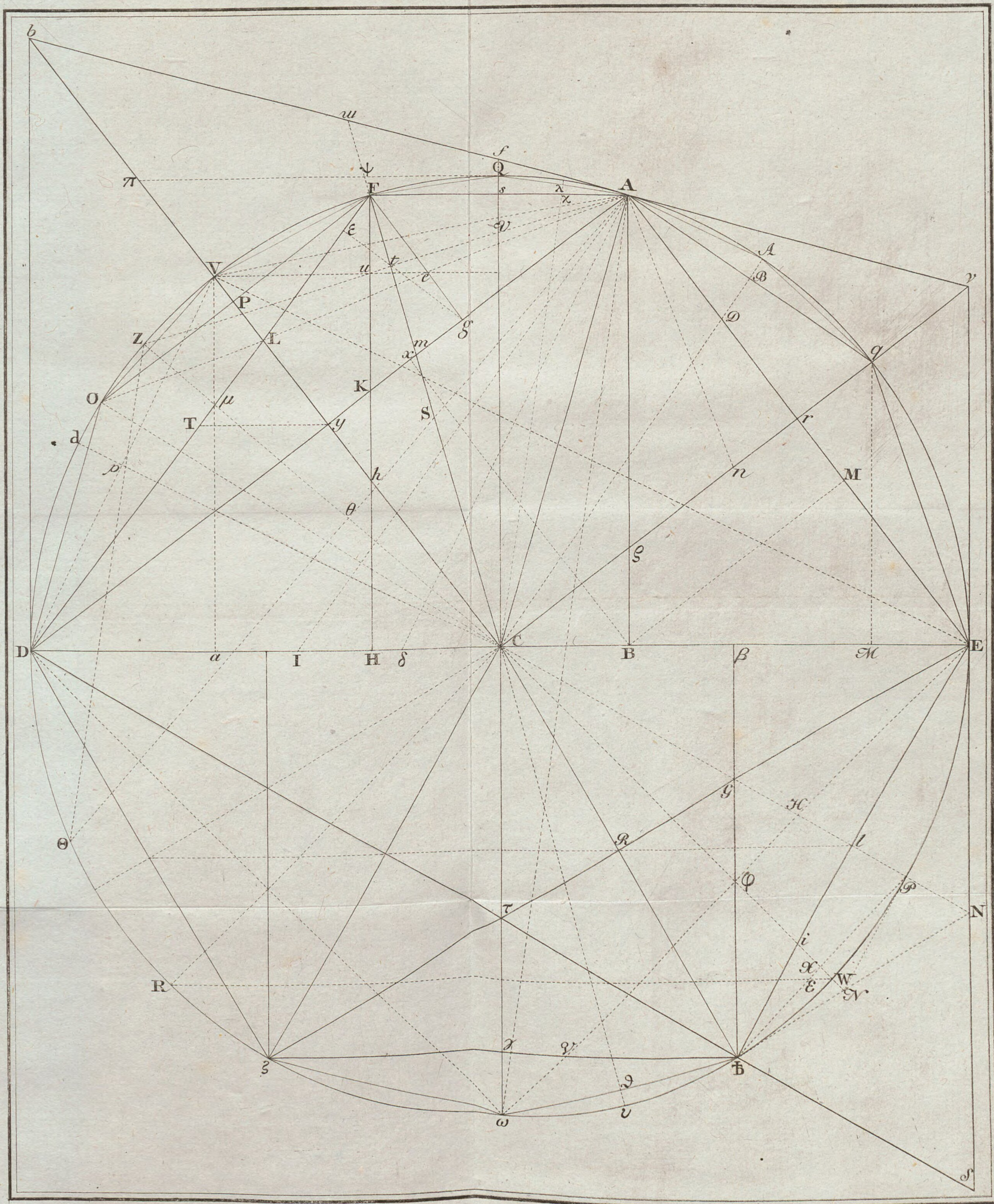
O. Die Oberfläche eines jeden Zirkels ist gleich der Quadratwurzel der Elemente, multiplicirt mit dem Quadrate des Halbmessers.

Der Umkreis eines jeden Zirkels ist gleich der Quadratwurzel der Elemente, multiplicirt mit dem Durchmesser.

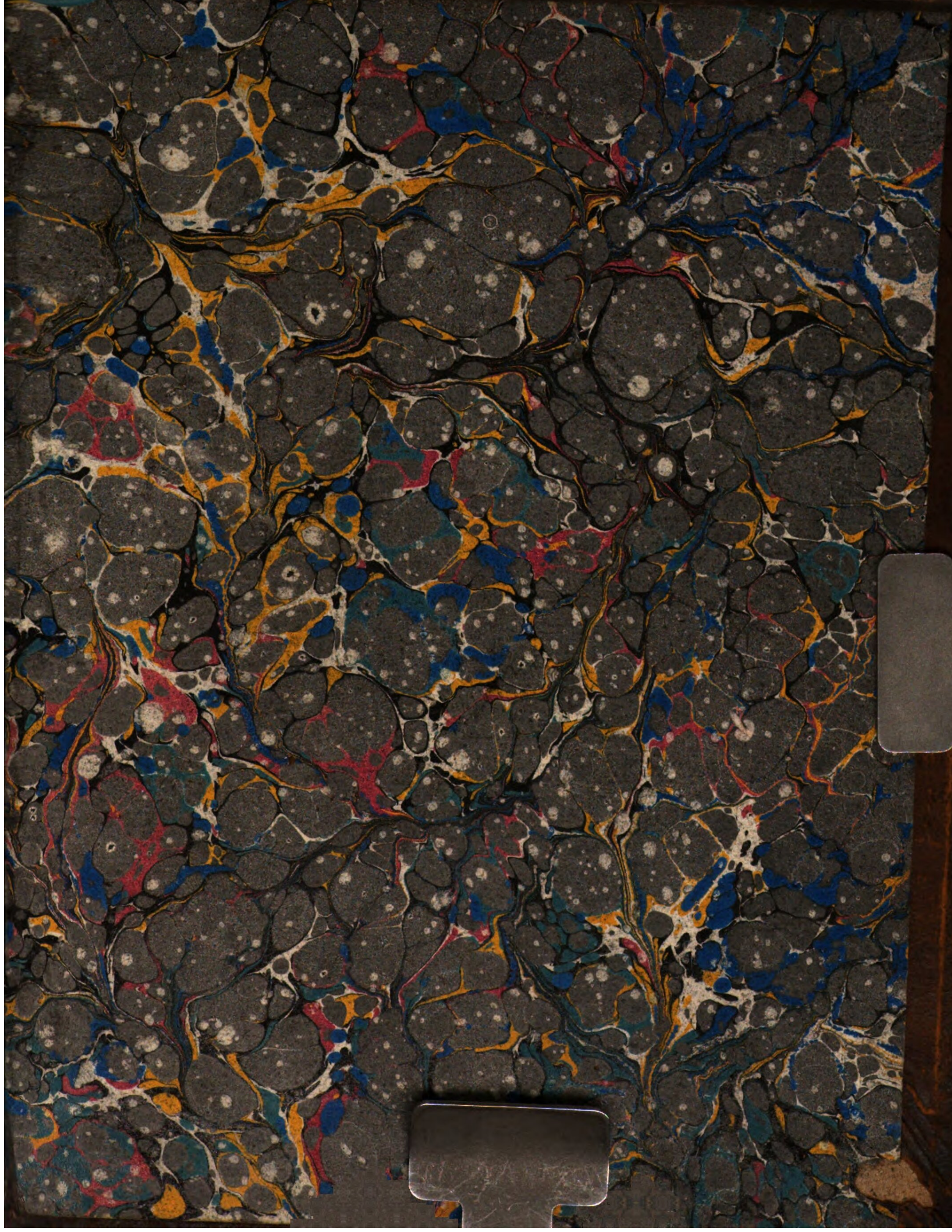
E r r a t a.

| Seite | | Zeile | | | | | |
|-------|----|----------|-------|--------------------|----------|--------------------------------------|--|
| 20 | .. | 17 | Statt | Coefficienten | lese man | Coefficienten | |
| 25 | .. | 8 | — | Schwierigket | — | Schwierigkeit | |
| 53 | .. | 11 | — | auf und | — | und auf | |
| 72 | .. | 21 | — | C^s | — | C_s | |
| 76 | .. | 6 | — | Fa^2 | — | FA^2 | |
| 97 | .. | 22 | — | AQ^2 | — | Aq^2 | |
| 113 | .. | 30 | — | $1,5794871$ | — | $1,5794871$ | |
| 117 | .. | 30 | — | <i>adquatae</i> | — | <i>adaequatè</i> | |
| 126 | .. | 2 | — | 0,030294392293 | — | 0,03294392293 | |
| 126 | .. | 28 | — | 0,0329293 | — | 0,03294392293 | |
| 130 | .. | 5 | — | 197642357358 | — | 197642353758 | |
| 133 | .. | 2 | — | $\frac{D}{10}$ | — | $\frac{D}{10^s}$ | |
| 146 | .. | 11 u. 12 | — | 10,82525 | — | 10,8253175 | |
| 150 | .. | 1 | — | 0,6 | — | 0,8 | |
| 166 | .. | 28 | — | der gleichen Seite | — | der ungleichen Seite | |
| 167 | .. | 33 | — | des umschriebenen | — | des 2 Halbmessern um-
schriebenen | |
| 167 | .. | 34 | — | mit dem Halbmesser | — | mit der Hälfte des Halbmessers | |
| 180 | .. | 22 | — | die Sehne | — | die Seite | |

| Seite | Teil | Wann Coefficienten | Wie man Coefficienten |
|-------|----------|----------------------|----------------------------------|
| 180 | 22 | — die Seite | — die Seite |
| 167 | 34 | — mit dem Halbmesser | — mit der Hälfte des Halbmessers |
| 167 | 33 | — des umschriebenen | — des eingeschriebenen |
| 166 | 28 | — der gleichen Seite | — der ungleichen Seite |
| 150 | 1 | — 0,6 | — 0,8 |
| 146 | 11 u. 12 | — 10,82525 | — 10,82515 |
| 133 | 2 | — $\frac{D}{10}$ | — $\frac{D}{10}$ |
| 130 | 5 | — 19764337558 | — 19764337558 |
| 126 | 28 | — 0,0329293 | — 0,0329293 |
| 126 | 2 | — 0,0329293 | — 0,0329293 |
| 117 | 30 | — abwärts | — abwärts |
| 113 | 30 | — 15794871 | — 15794871 |
| 97 | 22 | — 40 | — 40 |
| 76 | 6 | — 10 | — 10 |
| 72 | 21 | — C | — C |
| 53 | 11 | — auf und | — auf und |
| 25 | 3 | — Schwierigkeit | — Schwierigkeit |
| 20 | 17 | — 17 | — Coefficienten |







Mathematische Neuigkeiten oder die Elementar-Triangular- und Formular-
Arithmetik und Geometrie drey Theile, deren der erste die Arithmetik, der
zweyte die Geometrie betrifft und der dritte ein Verzeichniss von mehr als
zwey hundert achtzig Formeln ur- und abgeleiteter geometrischer Grundsätze

Wien 1804

4 Math.u. 79

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525704-5